

**С.Г. КАЛЬНЕЙ
В.В. ЛЕСИН
А.А. ПРОКОФЬЕВ**

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В двух томах

Том 1

*Допущено НМС по математике Минобрнауки РФ
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлениям
подготовки: 11.03.04 — «Электроника и нанoeлектроника»,
11.03.01 — «Радиотехника», 09.03.04 — «Программная
инженерия» (квалификация «Бакалавр»)*

Москва
КУРС
ИНФРА-М
2016

УДК 51-7(075.8)
ББК 22я73
К17

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

Кафедра «Высшая математика» РГУПС;
В.А. Федирко, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ «Станкин»

Кальней С.Г., Лесин В.В., Прокофьев А.А.

К17 Математика: учеб. пособие: в 2 т. — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2016. — Т. 1. — 352 с.

ISBN 978-5-906818-10-2 (КУРС)

ISBN 978-5-905554-42-1 (КУРС, общ.)

ISBN 978-5-16-011341-8 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-103524-5 (ИНФРА-М, online)

Первый том учебного пособия адресован студентам первого курса, обучающимся по техническим направлениям с квалификацией бакалавр. Большое внимание уделено доступности и наглядности описания математических понятий и результатов, примерам и иллюстрациям, облегчающим усвоение материала.

Содержит материал по дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, элементам теории криволинейных и поверхностных интегралов, числовым и степенным рядам, рядам и интегралам Фурье, аналитической геометрии и линейной алгебре.

Учебное пособие может быть полезно студентам других направлений подготовки, инженерам, преподавателям вузов.

УДК 51-7(075.8)
ББК 22я73


электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

ISBN 978-5-906818-10-2 (КУРС)
ISBN 978-5-905554-42-1 (КУРС, общ.)
ISBN 978-5-16-011341-8 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-103524-5 (ИНФРА-М, online)

© Кальней С.Г., Лесин В.В.,
Прокофьев А.А., 2016
© КУРС, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Раздел I	
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	4
Глава 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ	4
1.1. Действительные числа. Свойства действительных чисел	4
1.2. Понятие функции. Способы задания функции	8
1.3. Основные элементарные функции. Элементарные функции.....	13
1.4. Комплексные числа	16
Глава 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ	27
2.1. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей	27
2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.....	32
2.3. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.....	34
2.4. Неопределенные выражения	36
2.5. Существование предела последовательности.....	38
2.6. Число e	39
2.7. Предел функции в точке	41
2.8. Замечательные пределы.....	50
2.9. Сравнение бесконечно малых функций	54
2.10. Непрерывность функций	57
2.11. Свойства непрерывных на отрезке функций.....	63
2.12. Равномерная непрерывность.....	65
Глава 3. ПРОИЗВОДНАЯ.	
СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ	67
3.1. Понятие производной.....	67
3.2. Вычисление производных.....	71
3.3. Дифференциал	78
3.4. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций	84
3.5. Теоремы о среднем	86
3.6. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья	90
3.7. Формула Тейлора.....	93
Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ	101
4.1. Достаточные условия постоянства и монотонности функции	101
4.2. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов	102
4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	105
4.4. Выпуклость графика функции. Точки перегиба	106
4.5. Асимптоты	108
4.6. Схема исследования и построения графиков функций.....	111
4.7. Методы численного решения уравнений.....	112
Глава 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	116
5.1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.....	116
5.2. Таблица основных неопределенных интегралов.....	118

5.3.	Методы интегрирования.....	119
5.4.	Интегрирование рациональных дробей.....	124
5.5.	Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений	129
5.6.	Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей	131

Глава 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 134

6.1.	Задача о вычислении площади криволинейной трапеции	134
6.2.	Понятие определенного интеграла.....	135
6.3.	Свойства определенного интеграла	137
6.4.	Формула Ньютона—Лейбница	140
6.5.	Методы интегрирования для определенного интеграла	143
6.6.	Несобственные интегралы.....	145
6.7.	Приближенное вычисление определенных интегралов.....	153

Глава 7. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 157

7.1.	Вычисление площадей плоских фигур	157
7.2.	Объем тела вращения	161
7.3.	Длина дуги плоской кривой.....	162
7.4.	Площадь поверхности вращения	165
7.5.	Схема применения определенного интеграла	166
7.6.	Кривизна.....	169

Глава 8. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ 171

8.1.	Понятие функции многих переменных.....	171
8.2.	Предел и непрерывность функции многих переменных.....	174
8.3.	Частные производные.....	177
8.4.	Дифференцируемость функции многих переменных	180
8.5.	Производная сложной функции. Производная неявной функции.....	184
8.6.	Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	186
8.7.	Производная по направлению. Градиент	188
8.8.	Формула Тейлора для функции многих переменных	191
8.9.	Экстремумы функции многих переменных.....	193
8.10.	Условный экстремум.....	198

Глава 9. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 201

9.1.	Понятие двойного интеграла.....	201
9.2.	Вычисление двойного интеграла.....	206
9.3.	Двойной интеграл в полярных координатах	209
9.4.	Площадь поверхности.....	212
9.5.	Тройной интеграл.....	214
9.6.	Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.....	216
9.7.	Замена переменных в кратных интегралах в общем случае.....	219

Глава 10. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ..... 221

10.1.	Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода.....	221
10.2.	Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода	224
10.3.	Формулы Грина, Остроградского—Гаусса, Стокса.....	231

Глава 11. РЯДЫ 235

11.1.	Понятие числового ряда и суммы ряда.....	235
11.2.	Ряды с неотрицательными членами.....	237
11.3.	Ряды Лейбница	241

11.4.	Абсолютная и условная сходимость	241
11.5.	Степенные ряды	242
11.6.	Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	244
11.7.	Разложение функций в степенные ряды	248
11.8.	Ряды Фурье	253
11.9.	Интеграл Фурье	265

Раздел II

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ..... 268

Глава 12. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ 268

12.1.	Определители второго и третьего порядка	268
12.2.	Геометрические векторы, линейные операции над ними	272
12.3.	Скалярное произведение векторов, его свойства	277
12.4.	Векторное произведение, его свойства	279
12.5.	Смешанное произведение векторов, его свойства	280
12.6.	Прямая на плоскости	281
12.7.	Плоскость и прямая в пространстве	283

Глава 13. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА 288

13.1.	Кривые второго порядка. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы	288
13.2.	Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости	299
13.3.	Поверхности второго порядка, их классификация по каноническим уравнениям	301

Глава 14. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 306

14.1.	Сложение матриц и умножение матрицы на число. Умножение матриц	306
14.2.	Определитель порядка n , его свойства	309
14.3.	Ранг матрицы	314
14.4.	Обратная матрица, методы ее вычисления	319
14.5.	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера	323
14.6.	Исследование произвольной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений	328

Глава 15. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ 334

15.1.	Линейные пространства, основные определения и примеры	334
15.2.	Линейные операторы	341

Учебное издание

*Сергей Григорьевич Кальней
Виктор Васильевич Лесин
Александр Александрович Прокофьев*

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В двух томах

Том 1

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве «КУРС»

Подписано в печать 10.05.2016.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 22.0.
Тираж 500 экз. Заказ № 00000

ТК 520540-438100-100516

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонская, д. 17А, офис 104.
Тел.: (499) 709-16-28.
E-mail: kursizdat@gmail.com

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>