

**От авторов****Вариационное исчисление. Необходимые условия****XLIX Экстремумы функционалов**

§ 1. Некоторые сведения и понятия из функционального анализа

1.1. Функциональные пространства

1.2. Функционалы

1.3. Экстремумы функционалов

§ 2. Необходимые условия экстремума

2.1. Вариации функционалов

2.2. Теорема Ферма

2.3. Старшие вариации и условия старших порядков

Упражнения

Ответы

L Простейшая задача классического вариационного исчисления

§ 1. Лемма Лагранжа и уравнение Эйлера

§ 2. Интегрирование уравнения Эйлера

§ 3. Примеры

§ 4. Задача Больца. Условия трансверсальности

§ 5. Простейшая задача классического вариационного исчисления. Необходимое условие Лежандра

Упражнения

Ответы

LI Экстремальные задачи с ограничениями. Принцип Лагранжа

§ 1. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями-равенствами

§ 2. Ограничения-равенства в задаче Больца. Классическая изопериметрическая задача

§ 3. Необходимые условия экстремума в задаче со свободно скользящими концами

Упражнения

Ответы

LII Векторные экстремальные задачи

§ 1. Простейшая векторная задача с закрепленными концами

§ 2. Векторная задача с подвижными концами

§ 3. Задача Лагранжа: дифференциальные и фазовые ограничения

.1. Пример -- задача Чаплыгина

.2. Пример -- задача о брахистохроне

Упражнения

Ответы

LIII Функционалы от функций нескольких переменных

§ 1. Обозначения и допущения

§ 2. Простейшая задача для функционалов от функций нескольких переменных

§ 3. Условие трансверсальности для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных

Упражнения

Ответы

LIV Необходимые условия сильного экстремума

§ 1. Условие Вейерштрасса в простейшей задаче

§ 2. Расширение простейшей задачи. Условия Вейерштрасса--Эрдмана

Упражнения

Ответы

Линейное программирование

LV Элементы линейного программирования

- § 1. Постановка задачи
- § 2. Геометрия множества ограничений. Терминология
- § 3. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования
 - 3.1. Процедура перебора крайних точек множества ограничений
 - 3.2. Пересчет значений минимизируемой функции
 - 3.3. Последовательность вычислений. Симплекс-таблицы

Вычислительная математика

LVI Погрешности вычислений

- § 1. Погрешности
- § 2. Эволюция погрешностей в процессе вычислений
- § 3. Законы больших чисел и вероятностная оценка суммарной погрешности
- § 4. Источники погрешностей

LVII Линейные уравнения

- § 1. Линейные уравнения -- основные сведения
- § 2. Линейные уравнения -- метод исключения
 - 2.1. Трехдиагональные матрицы -- метод прогонки
- § 3. Линейные уравнения -- итерационные методы
 - 3.1. Метод простой итерации для линейных систем
 - 3.2. Метод Зейделя для линейных систем
- § 4. Точность численного решения систем линейных уравнений
 - 4.1. Выбор главного элемента
 - 4.2. Возмущения правой части. Обусловленность матрицы

LVIII Нелинейные уравнения и системы

- § 1. Нелинейные уравнения. Метод половинного деления
- § 2. Нелинейные уравнения. Метод хорд
- § 3. Нелинейные уравнения. Метод касательных (метод Ньютона)
- § 4. Нелинейные уравнения. Метод простой итерации
- § 5. Системы нелинейных уравнений

LIX Вычисление значений функций

- § 1. Интерполяция многочленами
 - 1.1. Каноническое представление интерполяционного многочлена
 - 1.2. Точность интерполяции
- § 2. Интерполяция кусочно-полиномиальными функциями
 - 2.1. Сплайны первого порядка дефекта 1
 - 2.2. Сплайны третьего порядка дефекта 2
 - 2.3. Сплайны третьего порядка дефекта 1
- § 3. Дробно-рациональная интерполяция
- § 4. Сглаживание и метод наименьших квадратов
 - 4.1. Линейное сглаживание
 - 4.2. Линейное по параметрам сглаживание
- § 5. Интерполяция функций двух переменных
 - 5.1. Прямоугольная интерполяция. Четырехузловая схема
 - 5.2. Прямоугольная интерполяция. Многоузловая схема
 - 5.3. Треугольная интерполяция
 - 5.4. Треугольная интерполяция. Частные случаи
 - 5.5. Треугольная интерполяция -- исключение среднего узла в десятиузловой схеме
 - 5.6. Заключительные замечания

LX Численное интегрирование

- § 1. Квадратурные формулы

- § 2. Квадратуры Ньютона--Котеса
- § 3. Точность простейших квадратур Ньютона--Котеса
- § 4. Квадратуры Гаусса
- § 5. Квадратуры специального назначения
- § 6. Кубатурные формулы для кратных интегралов

LXI Численное дифференцирование

- § 1. Постановка задачи
- § 2. Метод неопределенных коэффициентов. Первая производная
- § 3. Метод неопределенных коэффициентов. Старшие производные
- § 4. Интерполяционные формулы численного дифференцирования
- § 5. Неустойчивость процедур численного дифференцирования

LXII Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задача Коши

- § 1. Свойства решений задачи Коши
- § 2. Дискретизация задачи Коши
 - 2.1. Конечно-разностные схемы
 - 2.2. Формулы Адамса
 - 2.3. Формулы Рунге--Кутты
- § 3. Сходимость
- § 4. Аппроксимация. Устойчивость
- § 5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений
- § 6. Задача Коши для уравнений второго порядка

LXIII Обыкновенные дифференциальные уравнения. Краевые задачи

- § 1. Краевая задача для уравнения второго порядка
- § 2. Метод стрельбы
- § 3. Линейные краевые задачи. Прогонка
- § 4. Вариационные методы решения краевых задач
 - 4.1. Сведение краевой задачи к вариационной
 - 4.2. Метод Ритца
 - 4.3. Реализация метода Ритца для линейных краевых задач
 - 4.4. Система уравнений метода Ритца
 - 4.5. Кусочно-линейные аппроксимации

LXIV Уравнения математической физики

- § 1. Основные уравнения
 - 1.1. Классификация
 - 1.2. Начально-граничная задача для волнового уравнения
 - 1.3. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности
 - 1.4. Задача Дирихле для уравнения Пуассона
- § 2. Двумерные сетки и сеточные функции
 - 2.1. Прямоугольные сетки
 - 2.2. Треугольные сетки
- § 3. Дискретизация задачи
 - 3.1. Дискретизация уравнений. Шаблоны и расчетные соотношения
 - 3.2. Дискретизация граничных условий
- § 4. Устойчивость. Сходимость. Решение сеточных задач

Теория сплайнов

LXV Сплаины

- § 1. Сплайн-функции
 - 1.1. Интерполяционные кубические сплайны
 - 1.2. Сглаживающие кубические сплайны
- § 2. Геометрические сплайны

- 2.1. Кривые Безье
- 2.2. B-сплайновые кривые
- 2.3. Параметрические уравнения бикубической поверхности Безье

Предметный указатель

От авторов



Этот том отличается от всех предыдущих тем, что только один из его разделов -- "Вариационное исчисление" -- включает наборы задач. Все остальные разделы свободны от каких бы то ни было упражнений. Это объясняется тем, что разделы, отведенные под численные методы, линейное программирование и сплайны, представляют собой необходимое теоретическое и алгоритмическое преддверие вычислительного практикума, который естественно опирается на использование компьютеров, в том числе и персональных. Отбор заданий для такого практикума, описание соответствующего программного обеспечения, анализ полученных результатов и наиболее часто встречающихся ошибок -- задача, бесспорно важная, но заметно выходящая за рамки данного издания как по объему, так и по специфике. Предлагать же задачи с громоздкими вычислениями для счета "на руках" -- вещь идеологически неправильная, особенно при наличии значительного числа всевозможных программных средств (пакетов).

Об авторах



Краснов Михаил Леонтьевич

- Родился 30 ноября 1925 г.
- Окончил механико-математический факультет МГУ в 1951 г.
- В 1951-1985 гг. профессор Московского энергетического института, факультет математики.

Область интересов: дифференциальные уравнения.

Киселев Александр Иванович

- Родился 26 августа 1917 г.
- Окончил механико-математический факультет МГУ в 1951 г.
- В 1951-1962 гг. работал в Институте физических проблем АН СССР.
- В 1962--1996 доцент Московского энергетического института, факультет математики.

Область интересов: теория функций.

Макаренко Григорий Иванович

- Родился 23 апреля 1922 г.
- Окончил механико-математический факультет МГУ в 1951 г.
- В 1951-1960 профессор Московского энергетического института, факультет математики.
- В 1960-1978 гг. старший научный сотрудник Объединенного института ядерных исследований в Дубне.
- В 1978-1989 гг. профессор Московского государственного института путей сообщения, факультет математики.

Область интересов: дифференциальные уравнения.

Шикин Евгений Викторович

- Родился 10 декабря 1942 г.
- Окончил механико-математический факультет МГУ в 1964 г.

- Кандидат физико-математических наук (1970), доктор физико-математических наук (1977). Профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики.

Область научных интересов: геометрические методы исследования дифференциальных уравнений, вычислительная геометрия, компьютерная графика.

Читал курсы лекций "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", "Теория функций комплексного переменного", "Задача изометрического погружения и уравнения Монжа-Ампера", "Геометрические сплайны", "Геометрические методы в задачах поиска", "Компьютерная графика".

Authors



Krasnov Michail Leontievich

- Born on November 30th 1925 in Russia.
- Graduated from Moscow State University (Department of Mechanics and Mathematics) in 1951.
- 1951-1985: Professor of Moscow Power Institute. Department of Mathematics.

Fields of interest: Differential Equations.

Kiselyov Alexandr Ivanovich

- Born on August 26th 1917 in Russia.
- Graduated from Moscow State University (Department of Mechanics and Mathematics) in 1951.
- 1951-1962: Affiliated to the Institute of Physical Problems of USSR Academy of Sciences.
- 1962-1996: Associate Professor of Moscow Power Institute. Department of Mathematics.

Fields of interest: Theory of Functions.

Makarenko Grigorij Ivanovich

- Born on April 23th 1922 in Ukraine.
- Graduated from Moscow State University (Department of Mechanics and Mathematics) in 1951.
- 1951-1960: Assistant Professor of Moscow Power Institute. Department of Mathematics.
- 1960-1978: Senior Researcher of the Joint Institute of Nuclear Research. Dubna.
- 1978-1989: Professor of the Institute of Transport Engineers. Department of Mathematics.

Fields of interest: Differential Equations.

Shikin Evgenij Viktorovich

- Born on December 10th 1942 in Russia.
- Graduated from Moscow State University (Department of Mechanics and Mathematics) in 1964.

- Since 1964: Professor of Moscow State University. Department of Computational Mathematics and Cybernetics.

Fields of interest: Differential Geometry