Оглавление

3. Связь однородных гармонических полиномов и сферических функций
4. Обобщенные сферические функции
5. Теорема сложения

11. Функции второго рода
1. Интегральное представление
2. Асимптотическое представление
3. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования
4. Некоторые специальные функции, родственные функции второго рода $Q_0(z)$: неполные бета- и гамма-функции, интегральная показательная функция, интеграл вероятности, интегральные синус и косинус

12. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной
1. Разностное уравнение гипергеометрического типа
2. Разностные аналоги полиномов гипергеометрического типа и их производных
3. Свойство ортогональности
4. Полиномы Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье
5. Вычисление основных характеристик
6. Связь с полиномами Якоби, Лагерра и Эрмита
7. Связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука

13. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках
1. Разностное уравнение на неравномерной сетке
2. Классификация сеток
3. Основное свойство разностных уравнений гипергеометрического типа на неравномерных сетках
4. Формула Родрига
5. Свойство ортогональности
6. Вычисление весовых функций
7. Основные характеристики полиномов Рака и дуальных полиномов Хана
8. Асимптотические свойства
9. Построение некоторых классов неравномерных сеток с помощью формулы Дарбу—Кристоффеля

ГЛАВА III
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

14. Дифференциальное уравнение Бесселя и его решение
1. Решение уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах
2. Определение функций Бесселя первого рода и функций Ханкеля

5. Основные свойства цилиндрических функций
1. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования
2. Аналитическое продолжение и асимптотические представления
3. Функциональные соотношения
4. Разложения в степенные ряды

16. Интегральное представление Зоммерфельда

1. Интегральное представление Зоммерфельда для цилиндрических функций
2. Интегральные представления Зоммерфельда для функций Ханкеля и функций Бесселя первого рода

17. Специальные классы цилиндрических функций
1. Функции Бесселя второго рода
2. Функции Бесселя полуцелого порядка. Полиномы Бесселя
3. Функции Бесселя мнимого аргумента

18. Теоремы сложения
1. Теорема сложения Графа
2. Теорема сложения Гегенбауэра
3. Разложение сферической и плоской волны по полиномам Лежандра

19. Квазиклассическое приближение
1. Квазиклассическое приближение для решений уравнений второго порядка
2. Асимптотические представления для классических ортогональных полиномов при больших значениях n
3. Квазиклассическое приближение для уравнений с особенностью. Квазиклассика для центрально-симметричного поля
4. Асимптотика цилиндрических функций при больших значениях порядка. Формулы Лангера
5. Определение собственных значений энергии для уравнения Шредингера в квазиклассическом приближении. Формула Бора—Зоммерфельда

ГЛАВА IV
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

20. Уравнения гипергеометрического типа и их решения
1. Приведение к каноническому виду
2. Преобразование уравнений гипергеометрического типа в уравнения того же типа
3. Гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции
4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$
5. Совокупность решений гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнения
6. Решения уравнения Эрмита

21. Основные свойства функций гипергеометрического типа
1. Разложения в степенные ряды
2. Функциональные соотношения и асимптотические представления
3. Особые случаи

22. Представление различных функций через функции гипергеометрического типа
1. Некоторые элементарные функции
2. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита
3. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной
4. Функции второго рода
5. Цилиндрические функции

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Предисловие

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

В связи с широким развитием численных методов и возрастанием роли вычислительного эксперимента в большой степени повысился интерес к специальным функциям. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, при разработке математической модели физического явления для понимания основных закономерностей явления и выяснения относительной роли отдельных эффектов исходную задачу часто приходится упрощать для того, чтобы можно было получить решение в легко анализируемой аналитической форме. Во-вторых, при решении сложных задач на ЭВМ удобно использовать упрощенные задачи для выбора надежных и экономичных вычислительных алгоритмов. Очень редко при этом можно ограничиться задачами, приводящими к элементарным функциям. Кроме того, знание специальных функций необходимо для понимания многих важных вопросов теоретической и математической физики.

Наиболее употребительными специальными функциями являются так называемые специальные функции математической физики: классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита), сферические, цилиндрические и гипергеометрические функции. Теории этих функций и их приложениям посвящен целый ряд фундаментальных исследований. К сожалению, в этих исследованиях используется довольно громоздкий математический аппарат и множество специальных приемов. Поэтому давно существует потребность в построении теории специальных функций, основанном на одной общей и достаточно простой идее.

Авторам предлагаемой книги удалось найти удобный для изучения способ изложения теории специальных функций, опирающийся на обобщение известной формулы Родрига для классических ортогональных полиномов. Такой подход позволяет получить в явном виде интегральные представления для всех специальных функций математической

физики и вывести основные свойства этих функций. В частности, с помощью предложенного метода можно найти решения тех линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые обычно решаются методом Лапласа. Для построения теории специальных функций применяется минимальный математический аппарат: от читателя требуется владение лишь основными фактами теории обыкновенных дифференциаль-
ных уравнений и теории функций комплексного переменного. Это несомненное достоинство книги, так как известно, что большой объем необходимых математических знаний, в том числе и по специальным функциям, составляет основное препятствие при изучении теоретической и математической физики.

В процессе работы над книгой читатель приобретает навыки получения асимптотических формул, разложений в ряды, рекуррентных соотношений, различного рода оценок, расчетных формул и учится видеть внутренние логические связи между совершенно различными на первый взгляд специальными функциями.

В книге намечены связи с другими разделами математики и физики. Большое внимание уделено квантовомеханическим приложениям. Особый интерес для изучающих квантовую механику представляет изложение вопросов о нахождении дискретного спектра энергий и соответствующих волновых функций для задач, приводящих к использованию классических ортогональных полиномов. Эти вопросы авторам удалось изложить без традиционного испольаования обобщенных степенных рядов. Благодаря этому красиво и легко решаются такие важные задачи квантовой механики, как задача о гармоническом осцилляторе, движение частицы в центральном поле, уравнения Шредингера, Дирака и Клейна—Гордона для кулоновского потенциала. Заслуживает внимания также изложение метода Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна на основе метода Стеклова.

Для сферических и цилиндрических функций рассмотрены теоремы сложения, широко применяемые в теории атомных спектров, теории рассеяния, при расчетах ядерных реакторов. При изучении обобщенных сферических функций авторы вплотную подходят к теории представлений группы вращений и общей теории момента количества движения.
В дальнейшем читатель может углубить свои знания по специальным функциям с помощью книг, в которых специальные функции исследуются методами теории групп.
Для занимающихся теорией разностных методов представят интерес классические ортогональные полиномы дискретной переменной. С точки зрения приближенных вычислений поучительно применение квадратурных формул типа Гаусса для вычисления сумм и построения приближенных формул для специальных функций. Заметим, что многие существенные для приложений вопросы, излагаемые в книге, либо слабо освещаются, либо совсем не затрагиваются в учебной литературе.

Книга написана специалистами по математической физике и квантовой механике. Она возникла в процессе работы авторов над актуальной проблемой физики плазмы в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР.
В книге содержится очень большой материал, ясно и последовательно изложенный в малом объеме. Несомненно, что предлагаемая книга окажется полезной широкому кругу читателей.
Академик А. А. Самарский