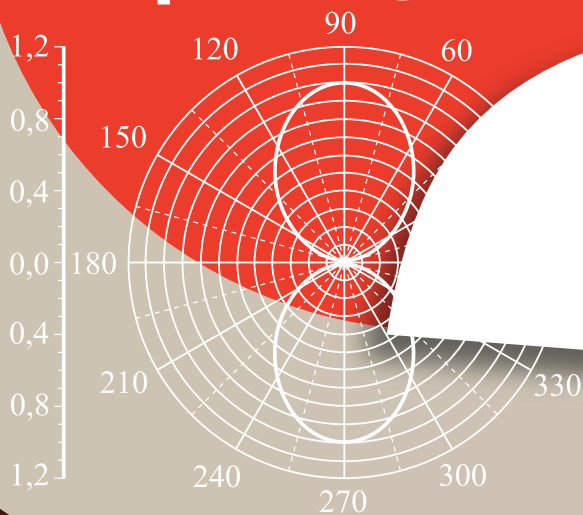


Н. П. Калашников  
М. А. Смондырев

# ОСНОВЫ ФИЗИКИ



ЛАБОРАТОРИЯ

**ПИЛОТ**

# Оглавление

<b>Часть IV</b>	<b>Колебания и волны</b>	<b>3</b>
<b>Глава 24</b>	<b>Колебательное движение</b>	<b>5</b>
24.1	Уравнение гармонических колебаний . . . . .	5
	Пружинный маятник . . . . .	5
	Математический маятник . . . . .	6
	Физический маятник . . . . .	7
	Движение поршня в сосуде с идеальным газом . . . . .	8
	Электромагнитный контур . . . . .	8
24.2	Гармонические колебания . . . . .	9
24.3	Сохранение энергии при гармонических колебаниях . . . . .	13
24.4	Сложение однонаправленных колебаний . . . . .	15
	Сложение колебаний с одинаковыми частотами . . . . .	15
	Биения . . . . .	16
	Колебания двух связанных осцилляторов . . . . .	18
24.5	Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . .	21
24.6	Свободные затухающие колебания . . . . .	23
	Уравнение затухающих колебаний . . . . .	23
	Анализ решений . . . . .	24
24.7	Вынужденные колебания . . . . .	28
	Контрольные вопросы . . . . .	31
<b>Глава 25</b>	<b>Переменный ток</b>	<b>33</b>
25.1	Квазистационарные токи . . . . .	33
25.2	Переменный ток через элементы цепи . . . . .	33
	Переменный ток через сопротивление . . . . .	33
	Переменный ток через индуктивность . . . . .	34
	Переменный ток через емкость . . . . .	35
25.3	Цепь переменного тока . . . . .	35
25.4	Резонансные явления . . . . .	37
	Резонанс напряжений . . . . .	38
	Резонанс токов . . . . .	38
25.5	Мощность в цепи переменного тока . . . . .	41
	Контрольные вопросы . . . . .	42

<b>Глава 26</b>	<b>Нелинейные колебания</b>	<b>43</b>
26.1	Нелинейные колебания маятника . . . . .	44
26.2	Фазовый портрет . . . . .	47
26.3	Автоколебания . . . . .	50
26.4	Эволюция и взаимодействие популяций . . . . .	54
	Популяция в отсутствие сдерживающих факторов . . . . .	54
	Внутривидовая конкуренция . . . . .	55
	О взаимоотношениях зайцев и волков . . . . .	57
	Контрольные вопросы . . . . .	60
<b>Глава 27</b>	<b>Волновые процессы</b>	<b>61</b>
27.1	Волны в упругих средах . . . . .	61
	Колебания струны . . . . .	61
	Колебания в идеальном газе . . . . .	62
	Колебания в твердых телах . . . . .	64
27.2	Решение волнового уравнения . . . . .	64
27.3	Энергия волны . . . . .	69
	Применения к звуковой волне . . . . .	70
27.4	Стоячие волны . . . . .	72
	Струна, закрепленная на одном конце . . . . .	73
	Гармоники . . . . .	74
	Сложение гармоник . . . . .	75
	Спектр колебаний . . . . .	78
27.5	Сферические волны . . . . .	80
	Трехмерное волновое уравнение . . . . .	81
	Эффект Доплера для звуковых волн . . . . .	82
	Сверхзвуковые скорости . . . . .	87
	Контрольные вопросы . . . . .	90
<b>Часть V</b>	<b>Основы волновой оптики</b>	<b>93</b>
<b>Глава 28</b>	<b>Волновая теория света и законы геометрической оптики</b>	<b>95</b>
28.1	Принцип Гюйгенса . . . . .	95
28.2	Законы отражения и преломления света . . . . .	96
	Закон отражения . . . . .	96
	Закон преломления . . . . .	97
	Принцип Ферма . . . . .	100
	Контрольные вопросы . . . . .	101
<b>Глава 29</b>	<b>Интерференция света</b>	<b>103</b>
29.1	Интенсивность света . . . . .	103
29.2	Когерентность световых волн . . . . .	104
29.3	Интерференция света от двух источников . . . . .	107
29.4	Способы наблюдения интерференции света . . . . .	109

29.5	Интерференция света в тонких пленках . . . . .	110
29.6	Полосы равной толщины. Кольца Ньютона . . . . .	112
29.7	Интерферометры . . . . .	114
	Контрольные вопросы . . . . .	116
<b>Глава 30</b>	<b>Дифракция света</b>	<b>117</b>
30.1	Принцип Гюйгенса—Френеля . . . . .	117
30.2	Метод зон Френеля . . . . .	119
30.3	Дифракция на круглом отверстии и диске . . . . .	122
30.4	Дифракция Фраунгофера от щели . . . . .	124
30.5	Дифракционная решетка . . . . .	129
	Дифракция от двух щелей . . . . .	130
	Дифракция на решетке . . . . .	131
	Характеристики дифракционной решетки . . . . .	134
30.6	Дифракция рентгеновских лучей . . . . .	136
30.7	Голография . . . . .	138
	Контрольные вопросы . . . . .	141
<b>Глава 31</b>	<b>Влияние среды на свойства света</b>	<b>143</b>
31.1	Поляризация света . . . . .	143
	Поляризация электромагнитной волны . . . . .	143
	Естественный и поляризованный свет . . . . .	144
	Закон Малюса . . . . .	146
	Поляризация при отражении и преломлении . . . . .	148
31.2	Дисперсия света . . . . .	150
	Теория радуги . . . . .	153
	Элементарная теория дисперсии . . . . .	157
31.3	Поглощение света . . . . .	160
31.4	Рассеяние света . . . . .	161
	Контрольные вопросы . . . . .	161
<b>Глава 32</b>	<b>Электромагнитные волны</b>	<b>163</b>
32.1	Усреднение микроскопических полей . . . . .	163
32.2	Уравнения Максвелла для сплошных сред . . . . .	166
32.3	Волновое уравнение . . . . .	168
32.4	Основные свойства электромагнитных волн . . . . .	169
32.5	Эффект Доплера для электромагнитных волн . . . . .	172
	Отражение света от движущегося зеркала . . . . .	174
32.6	Энергия и импульс электромагнитного поля . . . . .	176
	Давление света . . . . .	178
	Солнечный парус . . . . .	179
32.7	Законы оптики и уравнения Максвелла.	
	Формулы Френеля . . . . .	180
	Отражение и преломление $s$ -поляризованной волны . . . . .	181
	Отражение и преломление $p$ -поляризованной волны . . . . .	184

32.8	Полное внутреннее отражение . . . . .	186
32.9	Затухание волн в металле. Скин-эффект . . . . .	188
32.10	Дипольное излучение . . . . .	191
32.11	Излучение равномерно движущегося заряда . . . . .	197
	Контрольные вопросы . . . . .	199
<b>Часть VI Основы квантовой механики</b>		<b>201</b>
<b>Глава 33</b>	<b>Квантовая природа излучения</b>	<b>203</b>
33.1	Тепловое излучение . . . . .	203
33.2	Эмпирические законы излучения абсолютно черного тела . . . . .	209
33.3	Классические результаты для теплового излучения . . . . .	211
33.4	Закон излучения Планка . . . . .	213
	Контрольные вопросы . . . . .	218
<b>Глава 34</b>	<b>Фотоны</b>	<b>219</b>
34.1	Кванты света . . . . .	219
34.2	Фотоэлектрический эффект . . . . .	221
34.3	Эффект Комптона . . . . .	225
34.4	Опыт Боте . . . . .	230
	Контрольные вопросы . . . . .	232
<b>Глава 35</b>	<b>Волновые свойства микрочастиц</b>	<b>233</b>
35.1	Атом Бора . . . . .	233
	Постулаты Бора . . . . .	234
	Характеристики водородоподобного атома . . . . .	235
35.2	Волны материи . . . . .	241
35.3	Соотношения неопределенностей . . . . .	246
	Некоторые следствия соотношений неопределенностей . . . . .	247
35.4	Двухщелевой эксперимент . . . . .	251
35.5	О границах применимости квантовой механики . . . . .	252
	Контрольные вопросы . . . . .	255
<b>Глава 36</b>	<b>Уравнение Шрёдингера</b>	<b>257</b>
36.1	Волна вероятности . . . . .	257
36.2	Общее уравнение Шрёдингера . . . . .	259
36.3	Операторы, симметрия и законы сохранения . . . . .	261
36.4	Стационарное уравнение Шрёдингера . . . . .	262
36.5	Уравнение Шрёдингера для простейших систем . . . . .	265
	Свободная частица, движущаяся вдоль оси $x$ . . . . .	265
	Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме . . . . .	266
	Частица в трехмерной потенциальной яме . . . . .	268
	Одномерный осциллятор . . . . .	269
	Трехмерный осциллятор . . . . .	270

36.6	Принцип соответствия Бора . . . . .	271
36.7	Отражение и туннелирование частиц . . . . .	273
	Низкий бесконечный барьер . . . . .	273
	Высокий бесконечный барьер . . . . .	275
	Конечный потенциальный барьер . . . . .	276
36.8	Оптическая аналогия прохождения частицы над барьером . . . . .	281
	Ступенчатый потенциал . . . . .	281
	Прямоугольный барьер конечной ширины . . . . .	283
	Прохождение света через многослойную структуру . . . . .	285
	Контрольные вопросы . . . . .	287
<b>Глава 37</b>	<b>Теория атома</b>	<b>289</b>
37.1	Коммутирующие операторы . . . . .	289
37.2	Момент количества движения . . . . .	291
37.3	Атом водорода . . . . .	295
37.4	Спин электрона и тонкая структура спектров . . . . .	303
	Опыт Штерна—Герлаха . . . . .	306
37.5	Векторная модель атома . . . . .	310
37.6	Принцип Паули и валентность элементов . . . . .	312
	Эффективный заряд ядра, оценки потенциала ионизации и за- кон Мозли . . . . .	314
	Электронная конфигурация атомов . . . . .	316
37.7	Принцип тождественности частиц . . . . .	317
	Контрольные вопросы . . . . .	320
<b>Глава 38</b>	<b>Физическая природа химической связи</b>	<b>321</b>
38.1	Молекулы . . . . .	321
	Ионная связь . . . . .	321
	Ковалентная связь . . . . .	323
	Комбинации различных типов связи . . . . .	328
38.2	Пространственное строение молекул . . . . .	330
38.3	Молекулярные спектры . . . . .	332
	Электронные уровни энергии . . . . .	333
	Энергия колебательного движения ядер . . . . .	333
	Энергия вращательного движения молекул . . . . .	334
	Молекулярные спектры . . . . .	335
38.4	Комбинационное рассеяние света . . . . .	336
<b>Часть VII</b>	<b>Основы теории строения вещества</b>	<b>339</b>
<b>Глава 39</b>	<b>Взаимодействие излучения с веществом</b>	<b>341</b>
39.1	Вывод формулы Планка по Эйнштейну . . . . .	341
39.2	Общие сведения о лазерах . . . . .	345
	Прохождение излучения через вещество. Инверсия населеннос- тей . . . . .	345

	Принцип работы лазера . . . . .	346
	Типы лазеров . . . . .	349
39.3	Нелинейные эффекты в оптике . . . . .	352
	Контрольные вопросы . . . . .	355
<b>Глава 40</b>	<b>Теплоемкость кристаллов. Статистика Бозе—Эйнштейна</b>	<b>357</b>
40.1	Классические представления о теплоемкости кристаллов . . . . .	357
40.2	Средняя энергия квантового осциллятора . . . . .	359
	Средняя энергия квантового ротатора . . . . .	361
40.3	Теплоемкость кристаллов по Эйнштейну . . . . .	363
40.4	Теория теплоемкости твердых тел Дебая . . . . .	364
	Число колебаний в единице объема . . . . .	364
	Характеристическая температура Дебая . . . . .	366
40.5	Фононы . . . . .	368
	Линейная цепочка одинаковых атомов . . . . .	369
	Линейная двухатомная цепочка . . . . .	370
	Квантование колебаний кристаллической решетки . . . . .	373
40.6	Статистика Бозе—Эйнштейна . . . . .	375
	Плотность квантовых состояний . . . . .	378
	Конденсация Бозе—Эйнштейна . . . . .	379
	Контрольные вопросы . . . . .	382
<b>Глава 41</b>	<b>Элементы физики твердого тела. Статистика Ферми—Дирака</b>	<b>383</b>
41.1	Энергетические зоны в твердых телах . . . . .	383
	Применение оптической аналогии . . . . .	383
	Формирование энергетических зон в кристалле . . . . .	384
41.2	Металлы, диэлектрики и полупроводники . . . . .	388
41.3	Теория свободных электронов в металле. Энергия Ферми . . . . .	390
	Электронный газ при нулевой температуре . . . . .	393
41.4	Статистика Ферми—Дирака . . . . .	396
41.5	Распределение Ферми—Дирака . . . . .	396
41.6	Эффективная масса электрона . . . . .	404
41.7	Электропроводность металлов . . . . .	408
41.8	Полупроводники . . . . .	409
	Дырки . . . . .	409
	Собственная проводимость полупроводников . . . . .	412
	Примесная проводимость полупроводников . . . . .	415
	Контрольные вопросы . . . . .	420
<b>Глава 42</b>	<b>Контактные явления</b>	<b>421</b>
42.1	Работа выхода и контактная разность потенциалов в металле . . . . .	421
42.2	Термоэлектрические явления . . . . .	424
	Термо-ЭДС . . . . .	425

	ЭДС термопары . . . . .	428
	Эффект Пельтье . . . . .	431
	Эффект Томсона . . . . .	434
42.3	Полупроводниковые выпрямители . . . . .	438
	Контактная разность потенциалов в $p$ - $n$ -переходе . . . . .	438
	Сопротивление и односторонняя проводимость $p$ - $n$ -перехода . . . . .	439
	Туннельный диод . . . . .	441
	Фотоэлектрические явления в полупроводниках . . . . .	444
	Контрольные вопросы . . . . .	448
<b>Глава 43</b>	<b>Макроскопические квантовые явления</b>	<b>449</b>
43.1	Сверхтекучесть . . . . .	449
	Элементы микроскопической теории сверхтекучести . . . . .	450
	Сверхтекучесть конденсата . . . . .	452
43.2	Сверхпроводимость . . . . .	453
	Эффект Мейснера и критические значения температуры и магнитного поля . . . . .	454
	Сверхпроводники 2-го рода и вихри Абрикосова . . . . .	457
	Промежуточное состояние . . . . .	461
	Уравнение Лондонов . . . . .	462
	Квантование магнитного потока . . . . .	464
	Электрон-фононное взаимодействие и куперовские пары . . . . .	466
	Микроскопическая теория сверхпроводимости (БКШ) . . . . .	467
	Туннелирование электронов при контакте сверхпроводников . . . . .	471
	Эффекты Джозефсона . . . . .	474
	Контрольные вопросы . . . . .	481
<b>Часть VIII</b>	<b>Основы физики микромира</b>	<b>483</b>
<b>Глава 44</b>	<b>Физика атомного ядра</b>	<b>485</b>
44.1	Состав атомного ядра . . . . .	485
44.2	Физическая природа ядерных сил . . . . .	487
44.3	Масса и дефект массы ядра . . . . .	489
44.4	Модели атомного ядра . . . . .	493
	Модель жидкой капли . . . . .	493
	Оболочечная модель ядра . . . . .	496
44.5	Радиоактивность . . . . .	499
	Закон радиоактивного распада . . . . .	500
	Распад «дочерних ядер» . . . . .	502
	Альфа-распад . . . . .	505
	Бета-распад . . . . .	508
	Ядерные реакции и определение возраста археологических образцов радиоуглеродным методом . . . . .	510
44.6	Элементы дозиметрии . . . . .	518
44.7	Атомная и термоядерная энергетика . . . . .	524



Деление ядер . . . . .	524
Цепная реакция. Атомные бомбы и реакторы . . . . .	528
Термоядерная энергетика . . . . .	538
Контрольные вопросы . . . . .	543
<b>Глава 45 Основные представления физики элементарных частиц</b>	<b>545</b>
45.1 Фундаментальные взаимодействия . . . . .	545
Квантовая электродинамика . . . . .	546
Сильные ядерные взаимодействия . . . . .	549
Слабые взаимодействия . . . . .	553
Нарушение $P$ -, $C$ - и $CP$ -симметрии в слабых взаимодействиях	557
45.2 Квантовая хромодинамика . . . . .	559
45.3 Кварки и лептоны в Стандартной теории . . . . .	563
Контрольные вопросы . . . . .	566
<b>Глава 46 Элементарные частицы и космология</b>	<b>567</b>
46.1 За пределами Стандартной модели . . . . .	568
Масса нейтрино . . . . .	568
Барионная асимметрия Вселенной . . . . .	569
Великое объединение . . . . .	570
Суперсимметрия . . . . .	571
Суперструны . . . . .	572
46.2 Вселенная — прошлое и будущее . . . . .	573
Расширяющаяся Вселенная и закон Хаббла . . . . .	573
Критическая плотность . . . . .	580
Темная материя . . . . .	581
Темная энергия . . . . .	585
Гравитация и планковские масштабы . . . . .	588
Горячая Вселенная и Большой взрыв . . . . .	590
Контрольные вопросы . . . . .	594
<b>ЭПИЛОГ</b>	<b>595</b>

## Часть IV

# Колебания и волны

*И тогда я увидел Маятник.  
Движущийся шар на конце длинной нити,  
прикрепленной к своду центрального  
купола, описывал широкие колебательные  
движения ритмично и величаво.  
Любой поддался бы очарованию этого  
мирного дыхания.*

---

У. Эко. «Маятник Фуко»



## Глава 24

# Колебательное движение

Физические процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости, называются колебаниями. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т. д.

В зависимости от характера воздействия на колеблющееся тело различают свободные (или собственные) и вынужденные колебания.

Если положение системы в любое время может быть описано единственным параметром, то система имеет одну степень свободы. Примеры таких систем: маятник, колеблющийся в заданной плоскости; масса, связанная с пружиной;  $LC$ -цепочка (рис. 24.1). Обычно для таких систем употребляют общее название *осциллятор* (от англ. *oscillate* — колебаться, вибрировать).

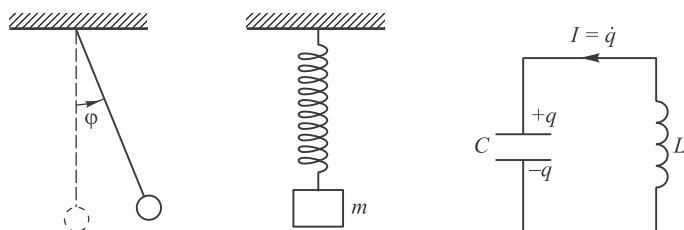


Рис. 24.1. Примеры колебательных систем с одной степенью свободы

### 24.1 Уравнение гармонических колебаний

В этом разделе мы покажем, что уравнения колебательного движения многих систем в сущности одинаковы, так что различные физические процессы могут быть описаны одними и теми же математическими формулами.

#### Пружинный маятник

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массой  $m$ , подвешенного на пружине (рис. 24.2). В положении равновесия сила тяжести  $mg$  уравновешивается упругой

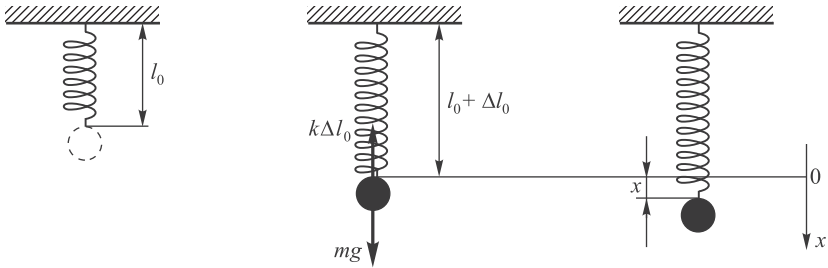


Рис. 24.2. Пружинный маятник (к выводу уравнения движения)

силой  $k\Delta l_0$ :

$$mg = k\Delta l_0, \quad \text{откуда} \quad \Delta l_0 = \frac{mg}{k}, \quad (24.1)$$

где  $\Delta l_0$  — статическое удлинение пружины. Направим ось  $x$  вниз и выберем начало отсчета так, чтобы координата  $x = 0$  соответствовала положению неподвижного шарика в положении равновесия.

Если теперь оттянуть шарик от положения равновесия на расстояние  $x$ , то полное удлинение пружины станет равным  $\Delta l_0 + x$ . С учетом закона Гука результирующая сила, действующая на шарик, будет тогда равна:

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x). \quad (24.2)$$

Используем соотношение (24.1) и в результате получим, что

$$F = -kx. \quad (24.3)$$

Знак «минус» означает, что сила стремится уменьшить отклонение шарика от положения равновесия. Полученное выражение соответствует упругой силе слабо деформированной пружины.

Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона:  $m\ddot{x} = -kx$ . Его можно также представить в виде

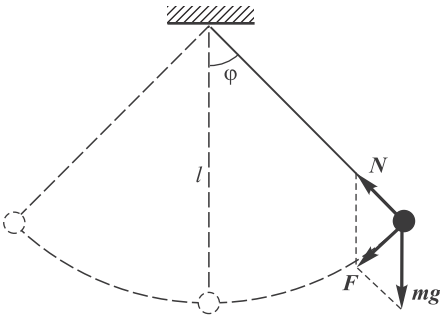
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (24.4)$$

## Математический маятник

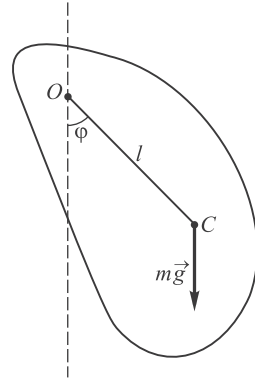
*Математический маятник* представляет собой идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Будем характеризовать отклонение маятника от положения равновесия углом  $\varphi$ , который образует нить с вертикалью (рис. 24.3). При отклонении маятника от положения равновесия на материальную точку массой  $m$  действуют сила тяжести  $mg$  и сила натяжения нити  $N$ . Их равнодействующая  $F$  направлена по касательной к окружности радиусом  $l$  и равна  $F = -mg \sin \varphi$ . Скорость материальной точки тоже направлена по касательной и равна  $v = l\dot{\varphi}$ , так что тангенциальное ускорение  $a_\tau = \dot{v} = l\ddot{\varphi}$ . Записываем теперь уравнение движения:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad (24.5)$$



**Рис. 24.3.** Силы, возникающие при колебаниях математического маятника (к выводу уравнения движения)



**Рис. 24.4.** При выводе уравнения движения физического маятника необходимо учитывать его момент инерции  $J$

(знак «минус» соответствует тому, что сила  $F$  стремится уменьшить угол  $\varphi$ ). При небольших отклонениях маятника  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Получаем

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (24.6)$$

### Физический маятник

Если колеблющееся тело, подвешенное на оси, невозможно представить как материальную точку, маятник называется *физическим* (рис. 24.4). При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен:

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (24.7)$$

где  $m$  — масса маятника, а  $l$  — расстояние  $OC$  между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$  маятника.

Рассматривая  $\varphi$  как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта, противоположность знаков  $M$  и  $\varphi$  можно объяснить тем, что векторы  $\vec{M}$  и  $\vec{\varphi}$  направлены в противоположные стороны. Обозначив момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, через  $J$ , можно записать основное уравнение динамики вращательного движения:

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (24.8)$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний:  $\sin \varphi \approx \varphi$ . В этом случае уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (24.9)$$

В случае, когда физический маятник можно представить как материальную точку, колеблющуюся на нити длиной  $l$ , момент инерции равен  $J = ml^2$ , и мы приходим к уравнению (24.6) движения математического маятника.

## Движение поршня в сосуде с идеальным газом

Рассмотрим поршень массой  $m$  и площадью поверхности  $S$ , закрывающий сосуд объемом  $V_0$  с идеальным газом, изолированным от окружающей среды (рис. 24.5). Пусть в состоянии равновесия давление в сосуде равно  $p_0$ . Это давление складывается из атмосферного давления  $p_a$  и давления  $mg/S$ , оказываемого поршнем:

$$p_0 = p_a + \frac{mg}{S}. \quad (24.10)$$

Переместим поршень на расстояние  $x$ . Объем сосуда увеличится и станет равным  $V = V_0 + Sx$ . Соответственно уменьшится давление. Поскольку процесс идет без теплообмена, применяем уравнение адиабаты (см. т. 1, уравнение (11.30)) и находим новое давление:

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma, \quad \text{откуда} \quad p = \frac{p_0}{(1 + Sx/V_0)^\gamma}. \quad (24.11)$$

Здесь  $\gamma$  — показатель адиабаты, зависящий от числа степеней свободы молекул газа. При малых колебаниях, когда смещения поршня много меньше высоты сосуда ( $x \ll V_0/S$ ), можно разложить  $p$  в ряд Тейлора:

$$p \approx p_0 \left( 1 - x \frac{\gamma S}{V_0} \right). \quad (24.12)$$

На поршень действуют три силы: сила атмосферного давления  $-p_a S$ , сила давления газа в сосуде  $pS$  и сила тяжести  $-mg$ . Знаки сил соответствуют выбору положительного направления оси  $x$  вверх. Используя (24.10) и (24.12), находим для равнодействующей  $F$  этих сил:

$$\begin{aligned} F &= -p_a S + pS - mg = -S \left( p_0 - \frac{mg}{S} \right) + Sp_0 \left( 1 - x \frac{\gamma S}{V_0} \right) - mg = \\ &= -x \frac{\gamma p_0 S^2}{V_0}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Записываем теперь уравнение движения поршня  $m\ddot{x} = F$  в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{mV_0}}. \quad (24.14)$$

## Электромагнитный контур

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью  $C$  и катушки индуктивностью  $L$  (рис. 24.6). Сопротивлением катушки и проводов пренебрегаем. Пусть в цепи идет ток  $I$ , заряжающий конденсатор:  $I = dq/dt$ . Так как внешняя ЭДС к контуру не приложена, ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E} = -L\dot{I}$  равна напряжению  $q/C$  на конденсаторе. Имеем два уравнения:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (24.15)$$

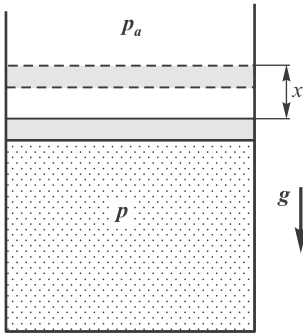


Рис. 24.5. Колебания поршня, закрывающего сосуд с идеальным газом

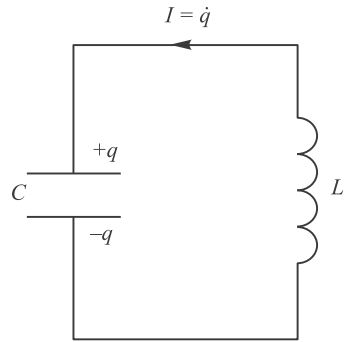


Рис. 24.6. Электромагнитный колебательный контур

Подставляя первое уравнение во второе, получаем уравнение для изменения заряда на конденсаторе:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (24.16)$$

Вместо использованной подстановки выражения тока через заряд можно продифференцировать второе из уравнений (24.15) и выразить производную от заряда через ток. В результате получим аналогичное уравнение для изменения тока в цепи с тем же выражением для  $\omega_0$ , что и в (24.16):

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (24.17)$$

## 24.2 Гармонические колебания

Мы рассмотрели несколько совершенно различных систем и убедились, что уравнения движения приводятся к одной и той же форме:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (24.18)$$

Разница между физическими системами сводится к различию в формулах для частоты собственных колебаний  $\omega_0$ , что связано с разным физическим смыслом переменной  $x$ : это может быть координата, угол, заряд, ток и т. д. Уравнение (24.18) описывает так называемые **гармонические** колебания. Гармоническими колебаниями называют такие колебательные движения, при которых смещение тела от положения равновесия совершается по закону синуса или косинуса. Такие колебания иногда называют *малыми колебаниями*, потому что линейный закон для «возвращающей силы» (в широком смысле слова) характерен именно для малых отклонений системы от положения равновесия.



Уравнение гармонических колебаний (24.18) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка (так как оно содержит вторую производную от переменной  $x$ ). Линейность уравнения означает, что:

- 1) если какая-то функция  $x(t)$  является решением этого уравнения, то функция  $Cx(t)$  также будет его решением ( $C$  — произвольная постоянная);
- 2) если функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  являются решениями этого уравнения, то их сумма  $x_1(t) + x_2(t)$  также будет решением того же уравнения.

Доказана также математическая теорема, что уравнение второго порядка имеет два независимых решения. Все остальные решения, согласно свойствам линейности, могут быть получены как их линейные комбинации.

Непосредственным дифференцированием легко проверить, что независимые функции  $\sin \omega_0 t$  и  $\cos \omega_0 t$  удовлетворяют уравнению (24.18). Значит, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t, \quad (24.19)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Это решение может быть представлено и в другом виде. Введем величину

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (24.20)$$

и определим угол  $\alpha$  соотношениями

$$\cos \alpha = \frac{C_2}{A} = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{C_1}{A} = -\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}. \quad (24.21)$$

Тогда общее решение (24.19) можно записать как

$$x(t) = A (\cos \omega_0 t \cos \alpha - \sin \omega_0 t \sin \alpha). \quad (24.22)$$

Согласно формулам тригонометрии, выражение в скобках равно  $\cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Окончательно приходим к общему решению уравнения гармонических колебаний в виде

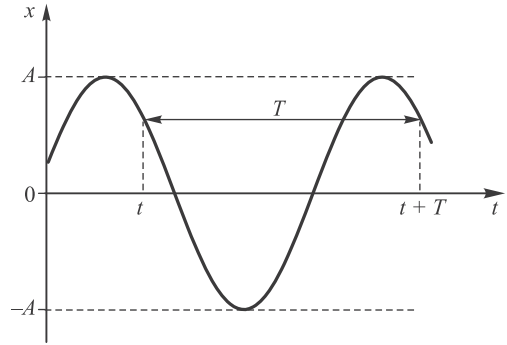
$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)}. \quad (24.23)$$

Величина  $A$  называется *амплитудой колебания*, а  $\alpha$  — *начальной фазой*. Вся комбинация  $\omega_0 t + \alpha$  называется *фазой колебания*. Выражения (24.19) и (24.23) совершенно эквивалентны, так что мы для простоты можем пользоваться любым из них. Оба решения являются периодическими функциями времени. Действительно, синус и косинус периодичны с периодом  $2\pi$ . Поэтому различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени  $t^*$ , за который фаза колебания получает приращение, кратное  $2\pi$ :

$$\omega_0(t + t^*) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24.24)$$

Отсюда следует, что  $t^* = 2\pi n / \omega_0$ . Наименьшее из этих значений

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \quad (24.25)$$



**Рис. 24.7.** Временная развертка гармонического колебания с периодом  $T$

называется **периодом колебаний** (рис. 24.7), а  $\omega_0$  — **круговой (циклической) частотой**. Равномерное движение по окружности также можно рассматривать как колебательный повторяющийся процесс. В этом случае  $\omega_0$  совпадает с угловой скоростью вращения. Используют также и **частоту** колебаний:

$$\boxed{\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}} \quad (24.26)$$

Частота  $\nu_0$  — это число колебаний, которое совершает система в единицу времени (в СИ — за секунду). Соответственно круговая частота равна числу колебаний за  $2\pi$  секунд. В СИ единицей частоты (круговой частоты) являются обратные секунды, для которых введено специальное название — герц ( $1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$ ).

Итак, если система в момент времени  $t$  характеризуется значением переменной  $x(t)$ , то же самое значение переменная будет иметь через промежуток времени  $T = 2\pi/\omega_0$ :  $x(t) = x(t + T)$ . Это же значение, естественно, повторится через время  $2T, 3T$  и т. д.

В общем решении входят две произвольные постоянные ( $C_1, C_2$  или  $A, \alpha$ , значения которых должны определяться двумя **начальными условиями**. Обычно (хотя и необязательно) их роль играют начальные значения переменной  $x(0)$  и ее производной  $\dot{x}(0)$ .

Приведем пример. Пусть решение уравнения гармонических колебаний (24.19) описывает пружинный маятник. Значения произвольных постоянных зависят от способа, каким мы вывели маятник из состояния равновесия. Например, мы оттянули пружину на расстояние  $x_0$  и отпустили шарик без начальной скорости. В этом случае  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ . Подставляя  $t = 0$  в (24.19), находим:  $x(0) = x_0 = C_2$ . Решение, таким образом, имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t.$$

Скорость груза находим дифференцированием:

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Подставляя сюда  $t = 0$ , находим вторую постоянную:  $\dot{x}(0) = C_1 \omega_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$ . Окончательно

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Сравнивая это уравнение с (24.23), находим, что  $x_0$  — это амплитуда колебаний, а его начальная фаза равна нулю:  $\alpha = 0$ .

Выведем теперь маятник из равновесия другим способом. Ударим по грузу, так что он приобретет начальную скорость  $v_0$ . Имеем тогда другие начальные условия:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$ . Так как  $x(0) = C_2 = 0$ , то наше решение имеет вид  $x(t) = C_1 \sin \omega_0 t$ . Скорость груза будет изменяться по закону  $\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t$ . Подставим сюда  $t = 0$ :  $\dot{x}(0) = v_0 = C_1 \omega_0$ ,  $C_1 = v_0 / \omega_0$ . Окончательно получаем

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{v_0}{\omega_0} \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right),$$

так что амплитуда колебаний равна  $A = v_0 / \omega_0$ , а начальная фаза  $\alpha = -\pi/2$ .

В общем случае, когда маятник отводится на расстояние  $x_0$  и отпускается с начальной скоростью  $v_0$ , связь начальных условий с амплитудой колебаний и начальной фазой имеет вид

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (24.27)$$

Дифференцируя решение (24.23) по времени, находим зависимость от времени, скорости и ускорения маятника:

$$\begin{cases} v(t) = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}), \\ a(t) = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \end{cases} \quad (24.28)$$

Видно, что скорость и ускорение также изменяются по гармоническому закону, причем амплитуда скорости равна  $A\omega_0$ , а амплитуда ускорения —  $A\omega_0^2$ . Скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ , ускорение находится в противофазе по отношению к смещению. Это означает, что в тот момент, когда смещение достигает наибольшего значения, ускорение достигает наибольшего по величине отрицательного значения и наоборот.

**Задача 24.1.** В очень грубом приближении Землю можно представить себе в виде твердого шара радиусом  $R_{\oplus} = 6,38 \cdot 10^6$  м и массой  $M_{\oplus} = 6,0 \cdot 10^{24}$  кг. Пусть в нем пробурили узкую сквозную радиальную скважину, проходящую через центр Земли, и уронили в нее камешек без начальной скорости. При каком сферически симметричном распределении плотности Земли  $\rho(r)$  камешек будет совершать гармонические колебания? Найдите для этого случая период колебаний и амплитуду скорости камешка. Сопротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь.

**Решение.** Всемирный закон тяготения Ньютона аналогичен закону Кулона в электростатике. Поэтому на камешек, находящийся на расстоянии  $r$  от центра Земли, будет действовать сила притяжения только той части массы Земли, которая находится внутри сферы радиусом  $r$ . Эта масса определяется соотношением

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \quad M(R_{\oplus}) = M_{\oplus}. \quad (24.29)$$

Уравнение движения камешка имеет вид

$$m\ddot{r} = -G \frac{M(r)m}{r^2}. \quad (24.30)$$

Уравнение гармонических колебаний с частотой  $\omega_{\oplus}$  (24.18) получается отсюда при линейной зависимости правой части (24.30) от расстояния до центра Земли:

$$G \frac{M(r)}{r^2} = \omega_{\oplus}^2 r. \quad (24.31)$$

Умножая обе части (24.31) на  $r^2$  и используя (24.29), приходим к соотношению

$$4\pi G \int_0^r \rho(r)r^2 dr = \omega_{\text{з}}^2 r^3. \quad (24.32)$$

Дифференцируя (24.32) по  $r$ , получаем, что плотность Земли должна быть постоянной:

$$\rho(r) = \rho_{\text{з}} = \frac{3}{4\pi G} \omega_{\text{з}}^2. \quad (24.33)$$

Постоянная плотность связана с массой Земли и ее радиусом соотношением  $M_{\text{з}} = \rho_{\text{з}}(4\pi R_{\text{з}}^3/3)$ . Отсюда получаем

$$\omega_{\text{з}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^3}} = \sqrt{\frac{g}{R_{\text{з}}}}, \quad (24.34)$$

где  $g = GM_{\text{з}}/R_{\text{з}}^2$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Теперь находим период колебаний камешка, упавшего в скважину:

$$T_{\text{з}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{з}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\text{з}}}{g}}. \quad (24.35)$$

Подставляем сюда численные данные:

$$T_{\text{з}} = 2\pi \sqrt{\frac{6,38 \cdot 10^6}{9,81}} = 0,81 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 24 \text{ мин.} \quad (24.36)$$

Амплитуда колебаний камешка равна радиусу Земли, значит, амплитуда скорости

$$v_{\text{з}} = \omega_{\text{з}} R_{\text{з}} = \sqrt{g R_{\text{з}}}. \quad (24.37)$$

Такую скорость набирает камешек к моменту прохождения центра Земли. Мы видим, что эта скорость совпадает с первой космической скоростью  $v_1$  (см. т. 1, гл. 6, разд. 6.6), численное значение которой  $v_1 = 7,9$  км/с. Таким образом, период  $T_1$  вращения спутника, летящего вблизи поверхности Земли, равен периоду колебаний камешка, падающего в скважине, проходящей через центр Земли:

$$T_1 = \frac{2\pi R_{\text{з}}}{v_1} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{з}}} = T_{\text{з}}. \quad (24.38)$$

Конечно, это равенство — следствие предположения об однородности плотности нашей планеты, что заведомо не так. При другом законе зависимости плотности  $\rho(r)$  от расстояния колебания падающего камешка не будут гармоническими и их период будет отличаться от периода обращения спутника вокруг Земли. ■

## 24.3 Сохранение энергии при гармонических колебаниях

Умножим уравнение гармонических колебаний (24.18) на скорость изменения переменной  $x$ :

$$\dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} x = 0. \quad (24.39)$$

Каждое из слагаемых можно представить как производную:

$$\dot{x} \ddot{x} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad \dot{x} x = \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2}.$$

С учетом этого уравнения (24.39) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \right) = 0. \quad (24.40)$$

Отсюда следует, что величина в скобках не зависит от времени, т. е. сохраняется в процессе колебаний:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = \text{const.} \quad (24.41)$$

Для выяснения физического смысла сохраняющейся величины применим эти соотношения к пружинному маятнику, когда  $\omega_0^2 = k/m$ . Видим, что уравнение (24.41) можно записать в виде суммы кинетической энергии груза и потенциальной энергии сжатой пружины:

$$\boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.}} \quad (24.42)$$

Таким образом, найденный закон сохранения есть не что иное, как **закон сохранения полной энергии колебательной системы**. Аналогично для электромагнитного контура переменная  $x = q$ ,  $\dot{x} = \dot{q} = I$  и  $\omega_0^2 = 1/LC$ . В этом случае соотношение (24.41) принимает вид

$$\boxed{\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.}} \quad (24.43)$$

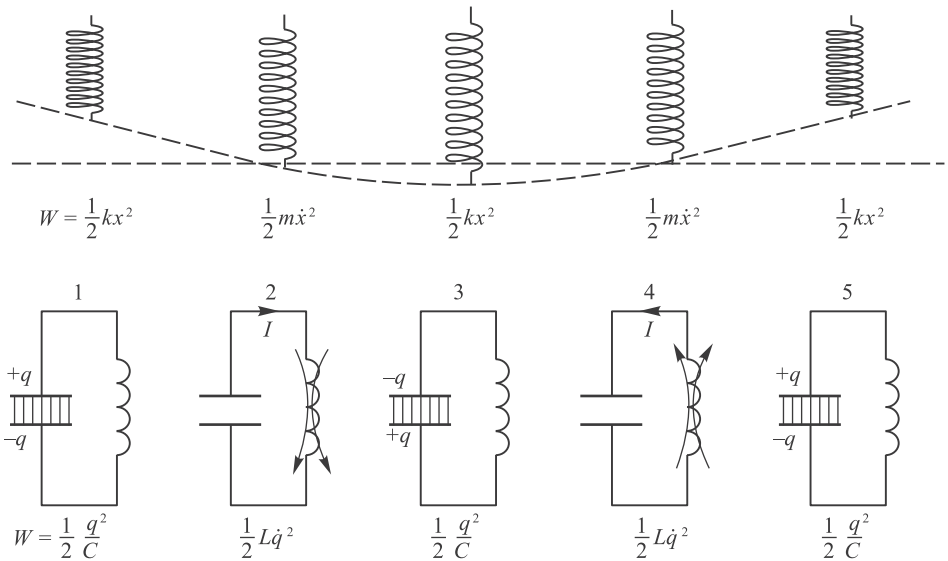
Первый член — энергия магнитного поля в катушке, второй — энергия электрического поля в конденсаторе. Снова мы получили, что сохраняется полная энергия в системе.

Возвращаясь к общей форме закона сохранения энергии (24.41) и подставляя сюда общее решение (24.23), получаем **законы изменения во времени кинетической и потенциальной энергий** (или их аналогов) и выражение для **сохраняющейся полной энергии колебаний**:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{A^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \\ U &= \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{A^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \\ W &= T + U = \frac{A^2\omega_0^2}{2}. \end{aligned}} \quad (24.44)$$

Отсюда следует, что:

- кинетическая и потенциальная энергии — периодические функции времени с периодом, равным половине периода колебаний;
- кинетическая и потенциальная энергии колеблются в противофазе — когда кинетическая энергия достигает максимума, значение потенциальной энергии минимально и наоборот;
- в колебательной системе энергия периодически «перекачивается» из одной формы в другую, а полная энергия  $W = T + U$  сохраняется;



**Рис. 24.8.** Различные стадии изменения во времени кинетической и потенциальной энергий в колебательной системе

- полная энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды и квадрату частоты.

Сказанное проиллюстрировано на рис. 24.8, на котором показаны различные стадии изменения кинетической и потенциальной энергий для пружинного маятника и электромагнитного контура.

## 24.4 Сложение однонаправленных колебаний

Может случиться так, что осциллятор принимает участие в двух одинаково направленных колебаниях с разными амплитудами, частотами и начальными фазами. Рассмотрим сложение таких колебаний.

### Сложение колебаний с одинаковыми частотами

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда частоты складываемых колебаний одинаковы. Общие решения складываемых гармонических колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2), \end{aligned} \tag{24.45}$$

где  $x_1, x_2$  — переменные, описывающие колебания,  $A_1, A_2$  — их амплитуды, а  $\alpha_1, \alpha_2$  — начальные фазы. Результирующее колебание  $x = x_1 + x_2$  удобно найти с помощью **векторной диаграммы**. В этом методе используется аналогия между вращением и колебательным процессом.

Возьмем общее решение (24.23) для гармонического колебания. Выберем ось  $Ox$ . Из точки  $O$  отложим вектор длиной  $A$ , образующий с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ . Если

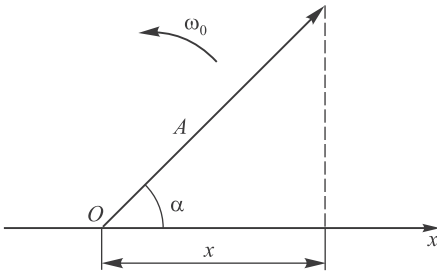


Рис. 24.9. Векторная диаграмма гармонического колебания

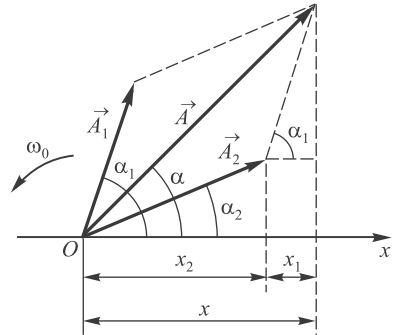


Рис. 24.10. Векторная диаграмма для сложения одинаково направленных колебаний одинаковой частоты

привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца этого вектора будет перемещаться по оси  $Ox$  от  $+A$  до  $-A$ , причем величина проекции будет изменяться по закону

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (24.46)$$

Таким образом, проекция конца вектора на ось  $Ox$  будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени (рис. 24.9).

Применим теперь эту технику к сложению колебаний (24.45). Представим оба колебания векторами  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ . Возьмем их векторную сумму  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  (рис. 24.10). Проекция  $\vec{A}$  на ось  $Ox$  равна сумме проекций  $x = x_1 + x_2$ . Таким образом, вектор  $\vec{A}$  представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью  $\omega_0$ , так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\alpha$ . Имеем согласно теореме косинусов

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \end{aligned} \quad (24.47)$$

В частности, если фазы складываемых колебаний равны или различаются на четное кратное  $\pi$ , т. е.  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$ , то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд  $A = A_1 + A_2$ . Если складываемые колебания находятся в противофазе ( $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n + \pi$ ), то  $A = |A_1 - A_2|$ .

## Биения

В этом разделе мы рассмотрим случай сложения одинаково направленных гармонических колебаний с разными частотами. На практике особый интерес представляет случай, когда складываемые колебания мало различаются по частоте. Как мы увидим, в результате сложения этих колебаний получаются колебания с

периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются *биениями*.

Для простоты рассмотрим случай, когда амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , а начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Частоты складываемых колебаний равны соответственно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Итак,

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (24.48)$$

Складываем эти выражения и учитываем известную формулу тригонометрии:

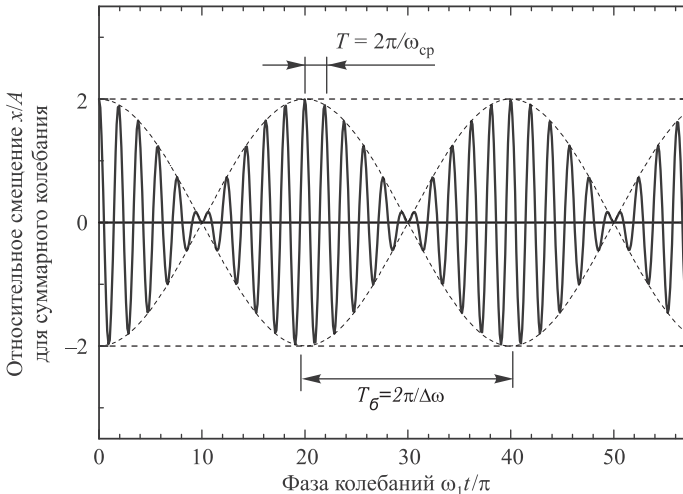
$$\begin{aligned} x &= A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (24.49)$$

Второй сомножитель в правой части (24.49) описывает гармоническое колебание со средней частотой  $\omega_{\text{ср}} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  близки, т. е. разность частот мала ( $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{\text{ср}}$ ), то первый сомножитель меняется медленно по сравнению со вторым. Поэтому результирующее колебание

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega_{\text{ср}} t \quad (24.50)$$

можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой  $\omega_{\text{ср}}$ , эффективная амплитуда  $A_{\text{эф}}$  которого изменяется со временем (рис. 24.11):

$$A_{\text{эф}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (24.51)$$



**Рис. 24.11.** Биения при сложении колебаний с близкими частотами:  $\omega_2 = 1,1 \omega_1$ . Тонкие пунктирные кривые показывают зависимость от времени эффективной амплитуды колебаний  $\pm A_{\text{эф}}(t) = \pm 2A \cos(\Delta\omega t/2)$