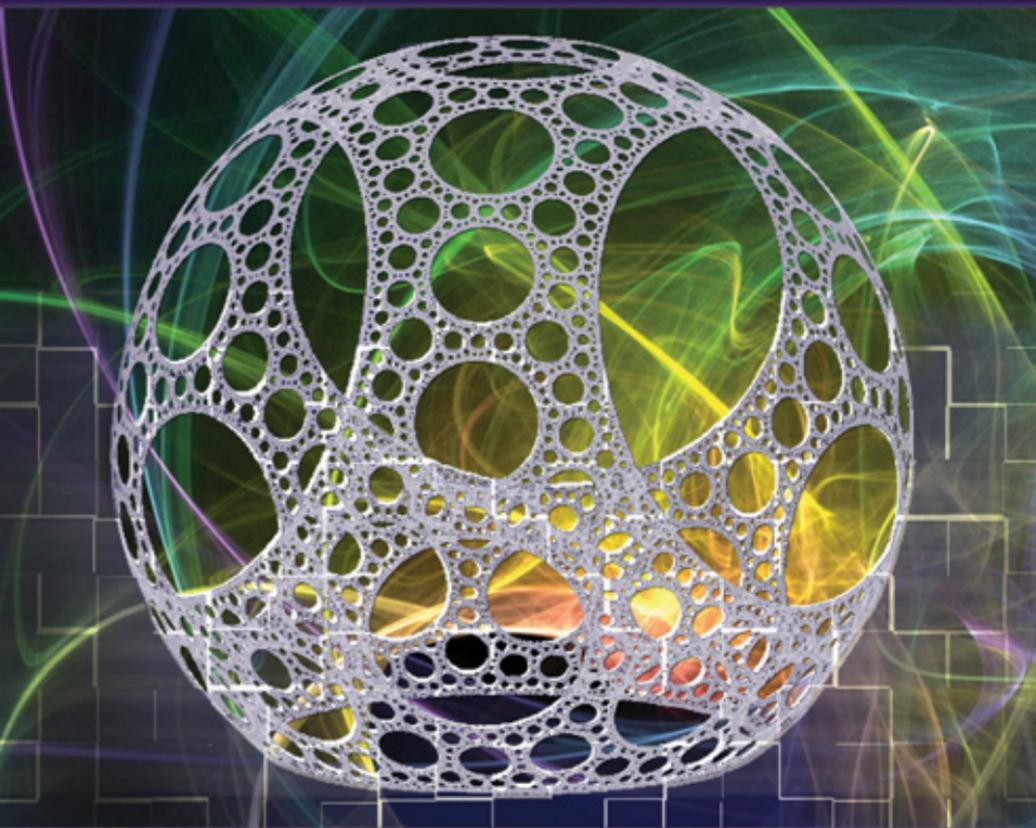


**В. Н. Осташков**

**ПРАКТИКУМ**  
**ПО РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО

**БИНОМ**



В. Н. Осташков

# **ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

Допущено

Научно-методическим советом по математике  
Министерства образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов специальностей:  
130202 – Геофизические методы исследования скважин  
150001 – Технология машиностроения  
150500 – Машины и аппараты химических производств

Лауреат конкурса НМС по математике 2010 г.  
«Лучшее учебное издание по математике» в номинации:  
Математика в технических вузах. Дополнительная литература



УДК 510(075.8)  
ББК 22.1я73  
О-76

*Серия основана в 2009 г.*

**Осташков В. Н.**

О-76 Практикум по решению инженерных задач математическими методами : учебное пособие / В. Н. Осташков. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 200 с. : ил., [4] с. цв. вкл. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-9963-0628-2

В учебном пособии реализуются принципы вариативности исследовательских профессионально-ориентированных задач и технических проблем, допускающих моделирование математическими средствами, в основном известными студентам технических университетов из курса высшей математики. Анализируются эвристические методы составления и решения профессионально-ориентированных задач, затрагиваются проблемы понимания собственных ощущений и способов мыслительной деятельности во время исследования и творческого процесса. Учебное пособие можно использовать в качестве дополнения к существующим учебным пособиям по математике.

Для студентов технических университетов и преподавателей.

УДК 510(075.8)  
ББК 22.1я73

---

*Учебное издание*

Серия: «Математическое моделирование»

**Осташков Владимир Николаевич**

**ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ  
ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**  
**Учебное пособие**

Редактор *М. С. Стригунова*

Художник *Н. А. Новак*

Технический редактор *Е. В. Денюкова*. Корректор *Е. Н. Клитина*  
Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете  $\text{\LaTeX}$  2<sub>ε</sub>

Подписано в печать 20.11.12. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 12,5. Тираж 1000 экз. Заказ

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru,

<http://www.Lbz.ru>

---

ISBN 978-5-9963-0628-2 © БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>Введение.</b> .....	8
§ 1. <b>Стержни (1–9)*</b> .....	17
§ 2. <b>Центроид (10–21).</b> .....	27
§ 3. <b>Коромысла и звёзды (22–44)</b> .....	30
§ 4. <b>Нагруженный клин (45–67)</b> .....	61
§ 5. <b>Вытекание из резервуара (68–75)</b> .....	73
§ 6. <b>Химия (76–87)</b> .....	77
§ 7. <b>Резервуары для хранения нефтепродуктов (88–105).</b> .....	85
§ 8. <b>Колебания рессоры (106–109)</b> .....	100
§ 9. <b>Работа по выкачиванию нефти (110–125)</b> .....	109
§ 10. <b>Перколяция (126–135).</b> .....	115
§ 11. <b>Физика Земли (136–156).</b> .....	120
§ 12. <b>Зубчатые колеса (157–169)</b> .....	131
§ 13. <b>Теплообмен. Криология (170–178).</b> .....	145
§ 14. <b>Механика (179–190).</b> .....	149
§ 15. <b>Часы. Маятники (191–203)</b> .....	152
§ 16. <b>Математика (204–225).</b> .....	157
§ 17. <b>Дендриты (226–230)</b> .....	182
<b>Приложение. Проекты</b> .....	195
<b>Список литературы</b> .....	199

---

\* В скобках указаны номера задач, относящиеся к соответствующему параграфу.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Наш разум по природе своей наделен  
неутолимой жаждой познавать истину.

*Цицерон*

В России давно настало время перехода от сырьевой экономики к экономике высоких технологий. Для осуществления этого перехода требуются и время, и определенные ресурсы, и воля. Но, главное, требуются самые разнообразные технические идеи, люди с развитым техническим мышлением как носители этих идей, а также надлежащие социальные условия. Реализация научно-технических проектов немыслима без воспроизводства носителей идей, организованных в огромный корпус компетентных инженеров: изобретателей, конструкторов, проектировщиков, производственников, эксплуатационников, призванных продвигать высокие технологии от разработки до реализации на рынке.

Бесспорно, подготовка инженеров, способных разрабатывать и внедрять инновационные проекты, считается сегодня приоритетной национальной проблемой, требующей комплексного решения. Фактически выпускающая кафедра выступает социальным заказчиком перед другими кафедрами относительно содержания подготовки высококвалифицированных специалистов, в частности перед математическими кафедрами. Университетам при подготовке технических интеллектуалов, заточенных на эффективное производство, надлежит осуществлять фундаментальную подготовку с учетом технологической специфики будущей профессии, реализовывать на учебных занятиях принципы вариативности постановки и решения как технических проблем, так и математических задач. М. В. Ломоносов верил в мощь русского гения и не без оснований был убежден,

Что может собственных Платонов  
И быстрых разумом Невтонов  
Российская земля рождать.

Настоящая книга — результат совпадения трехсторонних интересов в вопросах обучения поисковой, исследовательской, творческой деятельности будущих инженеров: во-первых, выпускающих кафедр, которые

определяют политику воспроизводства инженеров, нацеленных на новации, изобретения и открытия; во-вторых, автора как преподавателя высшей математики; в-третьих, самих будущих инженеров, заинтересованных в формировании своей математической компетентности с учетом приобретаемой профессии.

Работая над книгой, автор ставил перед собой три цели. Одна из них — обучающая — продиктована стремлением изложить в книге проблемы и задачи, которые способствовали бы формированию математической компетентности будущих инженеров. При этом предлагаемые проблемы и задачи должны быть подобраны с учетом профессиональной направленности.

Вторая цель — развивающая — познакомить читателя с приемами и методами исследовательской деятельности, первостепенной задачей которой является производство суждений и создание оригинального продукта — вершины творческого акта. «Нет ничего сильнее жажды познания», — считал В. И. Вернадский. И очень важно создать в университетской среде педагогические условия для утоления этой жажды и для развития у будущих инженеров способностей к творческой деятельности, заложенных Природой.

Третья цель — воспитывающая — прививая вкус к прекрасному, нацелить человека с техническим мышлением видеть мир целостным, самоподобным, сотканным из хитросплетений реальных, чувственных и абстрактных фрагментов реальности, а также и самому делать этот мир совершенным, комфортным для Природы и Человека. Известный поэт Валерий Брюсов писал:

Во все века жила, затаена,  
Надежда — вскрыть все таинства природы.

Книга может быть использована как дополнение к существующим учебникам и учебным пособиям, в которых материал изложен, как правило, последовательно и в соответствии с определенными дидактическими принципами. Речь идет о таких, например, учебных изданиях, как учебники [32]–[34], решебник [13], учебные пособия [12], [41] и др. В отличие от них в настоящем учебном пособии изложение выстроено подобно тому, как это происходит при исследовании технической или математической проблемы: внешне эклектично, порой со случайными выходами далеко за пределы исследуемой проблемы. Эта книга задумана как эссе о рождении новых идей — с элементами математики, математических методов решения инженерных задач из различных предметных областей, математического и наглядного моделирования, составления новых задач путем изменения, варьирования условия данной задачи,

рефлексии как обращения к своим мыслям и как внутреннего монолога креативного человека. Возникшие при этом кластеры задач содержат кроме уже «изобретенных велосипедов» немало оригинальных задач. Всего набралось 230 задач, и перед автором возникла проблема их классификации. Было решено отказаться от группировки по разделам математики, так как тогда кластеры рассыпались бы в пыль, и было решено с целью сохранения этих кластеров, изложить задачи в той последовательности, в какой они появлялись у составителей — у автора и его учеников. Соответствие задач разделам математики отражено в табл. 1.

Таблица 1

**Соответствие задач разделам математики**

0. Элементарная математика	2, 49, 51, 62–65, 103, 104, 115, 117, 156, 178, 183–185, 204–206, 214
1. Матрицы и определители	46, 48, 76–85, 105, 225
2. Аналитическая геометрия	10–21, 22–44, 49, 50, 66, 67, 105, 139–142, 195, 196, 198, 199, 202, 208–213, 215–224
3. Линейная (векторная) алгебра	1, 3, 4, 45, 46, 48, 53, 76–85, 136, 216
4. Дифференциальное исчисление	9, 44, 49, 88–98, 157–160, 162–167, 169, 193
5. Интегральное исчисление	55–57, 61, 110–113, 143–146, 192
6. Дифференциальные уравнения	5–8, 22, 45, 47, 58–60, 61–75, 86, 87, 106–109, 120, 147–155, 170–174, 177, 179–182, 186–191, 194, 203
7. Ряды	90
8. Теория вероятностей и математическая статистика	116, 118, 128–135, 168, 226
9. Численные методы	87, 101, 128–130, 133–135, 161, 200–202, 226–230
10. Фрактальная геометрия	52, 105, 128–130, 200, 201, 225, 226–230
11. Не определено	45, 99, 100, 102, 114, 118, 119, 121–127, 137, 138, 175, 176, 197, 207, 214

В книге принята сквозная нумерация задач, а нумерация рисунков и таблиц соответствует номерам задач; так, например, запись «Рис. 214.2» указывает на второй рисунок к задаче 214.

Я хочу выразить признательность моим коллегам, общение с которыми оказало благотворное влияние на мои взгляды относительно

вопросов формирования исследовательских умений будущих инженеров, воспитания их креативности при составлении и решении математических и профессионально-ориентированных задач и разработки связанной с этой проблематикой методики преподавания математики в технических университетах. Прежде всего, я выражаю огромную благодарность профессору Е. И. Смирнову, многолетнее сотрудничество с которым существенно повлияло на формирование моего мировоззрения преподавателя математики. Кроме того, я много почерпнул из оживленных дискуссий с профессорами В. В. Афанасьевым и А. В. Ястребовым, а также из общения с профессорами О. Б. Епишевой, А. Л. Жоховым, Р. Х. Казаковым, Н. Д. Кучугуровой, А. Б. Ольневой, С. А. Розановой, Н. Х. Розовым, В. С. Сековановым, Ю. И. Худаком. Я благодарен профессорам Тюменского государственного нефтегазового университета д. т. н. Е. В. Артамонову, д. г.-м. н. Р. М. Бембелю, д. т. н. Ю. Д. Земенкову, д. т. н. Ю. И. Некрасову, д. ф.-м. н. В. Ф. Новикову, д. г.-м. н. Ю. С. Папину, д. ф.-м. н. Ю. В. Пахарукову, д. т. н. А. А. Силичу за многочасовые консультации по интересующим меня техническим вопросам.

Большое спасибо моему другу В. Н. Алексееву, заведующему кафедрой математического анализа Ишимского государственного педагогического института им. П. П. Ершова, просмотревшему рукопись. Его проверка всех выкладок, взвешенная критика и предложения положительно повлияли на окончательную редакцию. Я признателен профессору А. С. Тихомирову, обсуждение с которым избранных вопросов алгебраической геометрии было полезным для рукописи. Я выражаю благодарность профессору В. В. Майеру и доценту А. Н. Халину за энергичную помощь в издании этого учебного пособия. Я благодарен моему ученику, а ныне бизнесмену В. Нуняну за спонсорскую поддержку, а также моим коллегам В. В. Проботюку и М. В. Пескову за техническую помощь при подготовке рукописи.

# ВВЕДЕНИЕ

Математическая истина абсолютна и вечна, а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования.

*Р. Пенроуз*

У математики три источника развития: *реальный мир* во всем его многообразии, сама *математика* с ее внутренними проблемами и *человек* — связующее звено между практикой и теорией, творец в постановке и решении проблем, живущий и действующий в соответствии со своими генетическими, интуитивными и рациональными программами.

Характерной особенностью инженера является наличие у него *технического мышления*. Последнее — целый комплекс интеллектуальных процессов и их продуктов, который обеспечивает решение проблем в профессиональной деятельности инженера [15]. Интеграция технического и математического мышлений — процесс неизбежный. Как говорится, от ИКТ и математики не зарекайся. Техническое мышление (наряду с математическим, пространственным, художественным и др.) — одна из форм мышления, т. е. того, что рождает мысли. Мысль — это спутница истины, истина же — великая спутница тайны, а истина и тайна гармонично взаимосвязаны, сложно переплетены друг с другом лентой красоты. Постоянное стремление пытливого ума постичь мыслью неразлучную троицу — тайну, истину, красоту — рано или поздно приводит к производству суждений, рождению изобретений и свершению открытий. Как именно у инженера или математика возникает догадка, озарение, инсайт, до сих пор неясно, хотя об этом написано немало книг. Тема эвристики — науки о том, как надо изобретать — была актуальной всегда. К ней обращались ученые в различных областях человеческого знания: в инженерном деле — Архимед, Р. Луллий, Р. Декарт, И. Кулибин, Г. Лейбниц, Г. С. Альтшуллер, И. В. Иловайский, Дж. К. Джонс, А. Осборн, У. Гордон и др.; в математике — Евклид, Архимед, Н. И. Лобачевский, А. Пуанкаре, А. Н. Колмогоров, Г. Вейль, Р. Пенроуз и др.; в преподавании математики — Д. Пойа, А. Г. Мордкович, В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов, А. В. Ястребов, З. А. Скопец, В. С. Секованов, И. М. Яглом и многие другие. В настоящем учебном пособии сделана

скромная попытка осветить эту проблематику в контексте формирования творческого потенциала у будущих инженеров математическими средствами, предназначенными для решения задач, в большинстве своем выросших, словно яблони дивного сада, на плодородной почве техносферы.

В своей профессиональной деятельности инженер как человек, обладающий техническим мышлением и живущий одновременно в трех мирах — материальном, чувственном, абстрактном, — имеет дело с различными *объектами*. Последние суть фрагменты объективной реальности — материальные, чувственные (перцептивные), абстрактные (идеальные). Под *моделью* объекта  $A$  понимают объект  $\tilde{A}$ , сохраняющий типичные черты объекта  $A$ , т. е. те свойства и характерные особенности объекта  $A$ , которые важны для данного исследования, использования, применения.

☛ Чтобы воспроизвести последовательность семи цветов радуги, расположенных в порядке убывания длины волны:

Красный, Оранжевый, Желтый, Зеленый, Голубой,  
Синий, Фиолетовый, (A)

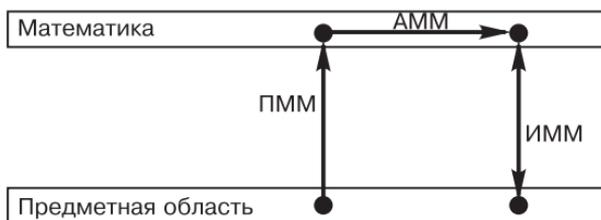
достаточно вспомнить, казалось бы, не более чем занятную фразу:

Каждый Охотник Желает Знать, Где Сидит Фазан. ( $\tilde{A}$ )

Фраза  $\tilde{A}$  является моделью последовательности  $A$ , при этом  $\tilde{A}$  сохраняет типичные черты моделируемого объекта  $A$ :  $\tilde{A}$  и  $A$  состоят из 7 слов; слова и в  $A$ , и в  $\tilde{A}$  упорядочены; начальные буквы соответствующих слов совпадают. Здесь модель  $\tilde{A}$  является *абстрактной*, поскольку таковыми являются любые слова. ☛

Процесс построения модели, ее анализа, интерпретации полученных результатов называется *моделированием*. Моделирование, основанное на математических методах, называется *математическим*. Такое моделирование применительно к исследованию технического объекта  $A$  использует математический язык, опирается на знаково-символьные или численные методы анализа его математической модели (ММ)  $\tilde{A}$  и завершается интерпретацией полученных результатов — переводом с математического языка на технический. Математическое моделирование состоит из трех этапов:

Построение (ПММ) — Анализ (АММ) — Интерпретация (ИММ).



Этап ПММ обычно выполняется в три шага:

- 1) дается словесное описание объекта  $A$  — *содержательная* постановка задачи моделирования;
- 2) делается перевод предыдущего описания на технический язык и интуитивно предсказываются возможные сценарии поведения объекта  $A$  — *концептуальная* постановка задачи моделирования;
- 3) выполняется перевод с технического на математический язык — *математическая* постановка задачи моделирования.

Далее, на этапе АММ происходит игра по математическим правилам, характерной особенностью которой является потенциальная возможность по известным входным параметрам моделируемого объекта  $A$  найти путем анализа модели  $\tilde{A}$  выходные параметры объекта  $A$ . Параметрами могут служить любые математические объекты — числа, векторы, тензоры, соответствия, отображения, функции, инциденты, множества и т. п. Наконец, из трех шагов состоит и этап ИММ:

- 1) дается истолкование на языке предметной области математических фактов, полученных в ходе анализа ММ;
- 2) выясняется, насколько хорошо теория согласуется с практикой (выполняется проверка ММ на адекватность);
- 3) осуществляется рефлексия (когда исследователь задается вопросами — что можно изменить в объекте  $A$  или модели  $\tilde{A}$ , в их свойствах, в методах исследования, в своем мышлении, в своем позиционировании относительно  $A$  или  $\tilde{A}$  и др.); при этом истинный исследователь не боится получить побочные, непредсказуемые продукты или суждения, а, наоборот, ставит разнообразные цели, даже если они конкурируют между собой. («Не всякое ли открытие состоит в неожиданном соприкосновении и последующей интерпретации двух различных контекстов?») [37, с. 173].)

Понятия модели и моделирования наиболее распространены в сфере обучения, в научных исследованиях, в проектной и конструкторской работе, в серийном техническом производстве. Чаще всего термин «модель» используют для обозначения устройства, отражающего

строение, свойства, действие данного объекта, и аналога данного объекта в виде чертежа, графика, схемы и т. п.

Компетенции инженера будем подразделять на профессиональные, информационные и технологические, а его личностные компетенции — на мировоззренческие, мотивационные, исследовательские. *Профессиональные* компетенции обеспечивают владение инженером комплексом профессиональных качеств, основанных на понимании структуры техносферы, знании характерных особенностей ее составляющих, умении реализовать свои *технологические* компетенции путем планирования, осуществления и мониторинга производственно-технологических процессов. *Информационные* компетенции содержат как компонент математическую компетенцию будущего инженера. К основным *математическим компетенциям* будущего инженера следует отнести понимание, знание и умения в области математики, необходимые для успешного изучения других дисциплин, использования математического аппарата как интегративного фактора междисциплинарного взаимодействия и организации исследовательской деятельности.

Моделирование является одним из составных компонентов наглядно-модельного обучения. В процессе обучения формируется модель существенных признаков объекта изучения, адекватных поставленной цели. Наглядно-модельное обучение включает в себя как построение модели (схемы, кода, заместителя), так и формирование адекватного результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается «наглядной» модели как опоре на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования. Еще с начала XX столетия многие психологи (О. Зельц, М. Вертгеймер, М. Бунге и др.) подчеркивали существенность процесса визуализации исследовательской ситуации как важного этапа решения задачи.

Наглядное моделирование в преподавании исследовалось Я. Коменским, К. Д. Ушинским, П. Я. Гальпериным, В. В. Давыдовым, В. Г. Болтянским, Л. М. Фридманом, Е. И. Смирновым. Оно тесно связано с чувственной моделью, которая занимает центральное место в (математическом) моделировании, ибо оно формирует устойчивый результат внутренних действий обучаемого в процессе моделирования. Чувственная модель позволяет «увидеть» то, что чаще всего невозможно созерцать в физическом пространстве. Например, как «увидеть», что две двумерные плоскости 4-мерного пространства пересекаются в некоторой точке, если это пересечение моделируется системой уравнений? Как «увидеть» то, что противоречит нашей трехмерной интуиции? Абстрактная модель (после решения такой системы) поз-

воляет знать, что плоскости пересекаются в точке, а чувственная модель на основании полученного знания помогает это понять. Одни люди «видят» это пересечение как общую внутреннюю точку двух отрезков, другие воспринимают его как точку соприкосновения двух параллелограммов, третьи слышат некую музыкальную ноту, четвертые отмечают специфические вкусовые или тактильные ощущения и т. д. Чувственная модель не поддается никакой формализации, но она активно участвует в таком важнейшем мыслительном процессе, как абстрагирование. И только после того, как обе модели — абстрактная и чувственная — позволяют *понимать* абстрактный язык и *знать* существенные свойства объекта, возникает таинственный союз интуиции и логики, направленный на формирование у обучаемого соответствующей компетенции, согласно которой он должен *уметь* применять полученные знания для дальнейшего моделирования. Восприятие приемов знаково-символьного языка вместе с кластерами знаний преломляется в чувственной модели через призму интуиции в диагностично поставленную цель. Сказанное резюмирует следующее определение [35, с. 230].

*Наглядное моделирование* — это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели, устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний.

Важную роль при разработке моделей играют *гипотезы*, т. е. предсказания, основанные на наблюдениях и догадках, а также обобщения и специализации. Формулирование и проверка правильности гипотезы зиждутся, как правило, на аналогиях. *Аналогия* как форма мышления основана на сходстве двух объектов, зависящем от уровня абстрагирования, определяемого конечной целью, и параметров объекта исследования. *Обобщение* — это логический прием, состоящий в переходе от менее общего к более общему. *Специализацией* называют логический прием, состоящий в переходе от более общего к менее общему. Так, например, теорема Пифагора является специальным случаем теоремы косинусов, а прямозубое цилиндрическое зубчатое колесо — частный случай косозубых колес, которые, в свою очередь, являются специализацией винтовых зубчатых колес.

Если результаты моделирования хорошо описывают свойства и предсказывают поведение исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* объекту.

Обычно анализ и синтез рассматривают как две стороны единого мыслительного процесса. В то же время инженеру ясно, что если

техническое изделие разобрать на составляющие — выполнить анализ, а потом собрать в обратном порядке — выполнить синтез, то ничего не изменится не только в изделии, но и в мышлении инженера.

Как известно, *анализ* приводит к разложению целого на составляющие, *синтез* же соединяет элементы в единое целое. Анализ и синтез как свойственные людям мыслительные операции формируются в деятельности. Между анализом и синтезом могут быть сравнение, оценка, измерение и т. п. *Сравнение* — одна из операций мышления, направленная на сопоставление объектов или их частей по некоторому основанию. Если условиться, что анализ есть движение вниз ↓ в иерархии сложной системы, а синтез — движение вверх ↑, то можно сказать, что оценивание, сравнение, измерение — это движение по горизонтали →. Тогда триада

$$[\text{анализ} - \text{оценка} - \text{синтез}] \tag{1}$$

есть тройка стрелок ↓ → ↑, а триаде

$$[\text{синтез} - \text{оценка} - \text{анализ}] \tag{2}$$

отвечают стрелки ↑ → ↓.

По схеме

$$\text{Интегрирование} \equiv [\text{разбиение} - \text{оценка} - \text{суммирование}] \tag{3}$$

вводится понятие определенного интеграла от непрерывной функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $I = [a, b]$ . Триаду (1) мы переписем, используя соответствующие (рис. 1.1) символы:

$$\int \equiv [\partial - \Omega - \Sigma]. \tag{4}$$

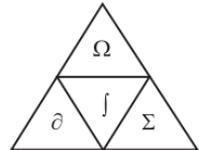


Рис. 1

Согласно схеме (4), определенный интеграл вычисляется в три этапа, а каждый из этапов, в свою очередь, можно представить тремя шагами. В итоге возникает 9-звенный путь

$$(\rightarrow \downarrow \rightarrow)(\downarrow \rightarrow \uparrow)(\rightarrow \uparrow \rightarrow):$$



Разбиение  $\partial$

→ оценка — задаем произвольное число  $n \in \mathbb{N}$

↓ анализ — делим  $I$  на  $n$  отрезков  $a_k, k = 1..n$

→ оценка — измеряем длины  $\Delta x_k$  отрезков  $a_k$

Оценка  $\Omega$ 

↓ анализ — выбираем точку  $\xi_k \in a_k$

→ оценка — вычисляем  $f(\xi_k)$  для каждого  $k$

↑ синтез — перемножаем числа  $f(\xi_k)$  и  $\Delta x_k$

Суммирование  $\Sigma$ 

→ оценка — геометрически произведение  $f(\xi_k)\Delta x_k$  представляет площадь прямоугольника

↑ синтез — находим интегральную сумму  $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$

→ оценка — если при любых разбиениях отрезка  $I$ , таких, что  $\varepsilon = \max \Delta x_k \rightarrow 0$ , и при любом выборе точек  $\xi_k$

интегральная сумма  $S_k$  стремится к одному и тому же

пределу, то этот предел называется определенным

интегралом:  $\int_I f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ .

С. Л. Рубинштейн ввел термин «анализ через синтез» для обозначения того, что в процессе мышления познаваемый объект включается в новые связи (см. схему (2)) и выступает в новом качестве, фиксируемом в новом понятии. В таких случаях благодаря неожиданным эмерджентным связям исследуемый объект, подобно искусно выращенному кристаллу, сияет свежими формами, преисполненный оригинальной палитры свойств, источая из глубин обновленного содержания свет истины, радующий беспрестанно пульсирующую мысль — мысль творческую, постоянно нацеленную на варьирование, на проникновение в непознанное.

Приемы варьирования настолько разнообразны, что практически невозможно собрать их в единый список с целью порекомендовать его другим для успешного погружения в творчество.

В технической области приемы варьирования можно разделить на 3 группы в соответствии с тем, что именно варьируется — объекты, их свойства или отношения между объектами [17, с. 80–99]:

✳ объекты — дробление, другое измерение, обратная связь, «посредник», копия, замена механической схемы, гибкие оболочки и тонкие пленки, «обратить вред на пользу»;

✳ свойства — вынесение, универсальность, матрешка, антивес, сферидальность, пневмо- и гидроконструкции, пористость, однородность, композиционные материалы, изменение параметров, «дорогая долговечность» и «дешевая одноразовость»;

✳ отношения — асимметрия, объединение, предварительное напряжение, предварительное исполнение, эквипотенциальность, наоборот, ди-

намичность, механические колебания, периодическое движение, непрерывность полезного действия, отбрасывание и регенерация частей, фазовый переход, термическое расширение.

В математике приемы варьирования делятся также на три группы (см., например, монографию [5, с. 21–22]):

∫ объекты — *аналог* (замена одного объекта другим; например, замены: точка  $\leftrightarrow$  прямая, точка  $\leftrightarrow$  плоскость, точка  $\mapsto$  окружность и т. п.), *пространство* (переход от плоскостного размещения объекта к пространственному, изменение размерности объекта или его объемлющего пространства), *время* (перенос функционирования объекта в другое время);

∫ свойства — *локализация* (отделение части объекта, изменение части условий, частичное выполнение условия задачи), *деформация* (изменение размеров, показателей, качественных характеристик, оптимальность), *реструктуризация* (изменение структуры объекта посредством изменения отношений между его частями);

∫ отношения — *трансформация* (применение симметрий, антисимметрий, асимметрий, динамики, ритмики, нюансов, контраста; инверсия, инверсия процедур, обращение функций, взгляд на объект с противоположной точки зрения, замена динамики статикой и наоборот), *приспособление* (адаптация объекта к внешним условиям, к взаимодействию старого и нового), *обозначения* (с индексами, без индексов, векторная форма, матричная форма, тензорная форма).

Рассматриваемые в данном пособии задачи являются преимущественно *профессионально-ориентированными*, т. е. они формулируются в терминах предметной области, допускают математическое моделирование и являются притягательными для личности: обладают занимательностью в фабуле задачи, допускают вариативность содержания, обогащают творческий опыт будущего инженера. Умение конструировать задачи и решать их — профессиональное качество, необходимое для каждого инженера.

Одной из форм развития творческих способностей является работа над проектом, который студент (или даже малая группа) сам выбирает, исполняет и оформляет. Перечень проектов приводится в Приложении, в самом конце книги. Выполняя их, будущие инженеры самостоятельно намечают стратегии достижения цели — будь то решение технической проблемы или математической задачи, — производят отбор необходимых методов, способов, приемов, причем не перенимая их слепо у кого-то, а творчески переосмысливая, искусно вплетая их в красоту рождающегося орнамента собственных фантазий — движущей силы

[ . . . ]



**Осташков Владимир Николаевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Тюменского государственного нефтегазового университета, автор 80 научных и научно-методических работ по математике, фрактальной геометрии, дидактике математики, включая 9 монографий и учебных пособий.

Как протекает рефлексия погруженного в творческое исследование реальных проблем инженера?

Какие он применяет эвристические методы составления и решения технических и математических задач?

Исчерпывающих ответов на эти вопросы пока, к сожалению, не существует; в то же время, данное учебное пособие дает вдумчивому читателю много пищи для размышления в виде многочисленных задач с решениями, исследовательских проектов, примеров и приложений.