Оглавление

Предисловие к четвертому изданию

Основная часть этой книги написана в 1968 году. За это время идеи и методы симплектической геометрии, на которых основана книга, нашли многочисленные применения как в математической физике и других областях приложений, так и в самой математике. В особенности следует отметить бурное развитие теории коротковолновых асимптотик, с их приложениями в оптике, теории волн, акустике, спектроскопии и даже химии, и одновременное развитие теории лагранжевых и лежандровых особенностей и многообразий, т. е. теорий особенностей каустик и волновых фронтов, их топологий и их перестроек.

Необыкновенно далеко продвинулось исследование интегрируемых задач гамильтоновой динамики. Было открыто неожиданно большое число интегрируемых динамических систем, изучение которых привело к неожиданным и взаимообогащающим связям этих вопросов с трудными проблемами алгебраической геометрии и математической физики.

В 70-80-е годы были достигнуты большие успехи в симплектической топологии. Здесь прежде всего выделяется доказательство теоремы о неподвижных точках симплектических диффеоморфизмов, обобщающей "геометрическую теорему" Пуанкаре (Добавление 9), полученное в 1983 году Ш. Конли и Э. Цендером. За этим доказательством последовали работы М. Шаперона, А. Вейнстейна, Ж.-К. Сикорава, М. Громова, Ю. Чеканова, Флоера, Витербо, Хофера и др. Я надеюсь, что в этой интенсивно развивающейся области вскоре будет достигнут еще больший прогресс, который приведет к доказательству сформулированных и открытию новых теорем симплектической и контактной топологии - новой области математики, вызванной к жизни вопросами механики и оптики.

В третьем издании появилось три новых Добавления (13-15). Они отражают новое развитие геометрии систем лучей (теории особенностей и перестроек каустик и волновых фронтов, связанной с теорией групп, порожденных отражениями), теории интегрируемых систем (геометрической теории эллиптических координат, приспособленной для бесконечномерных обобщений) и теории пуассоновых структур (часто встречающихся в математической физике обобщений симплектических структур, отличающихся тем, что скобки Пуассона вырождаются).

В настоящем издании учтены опечатки, допущенные в предыдущих изданиях, исправлены ошибки, замеченные внимательными читателями.

Более подробное изложение теории возмущений читатель найдет в книге В. И. Арнольда, А. И. Нейштадта и В. В. Козлова "Математические аспекты классической и небесной механики" (2-е изд., перераб. и дополн. М.: УРСС, 2000). Читателю будет также интересен четвертый том энциклопедической серии "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления" (Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985), который содержит обзор современного состояния симплектической геометрии (В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь), статью А. А. Кириллова о геометрическом квантовании и обзор С. П. Новикова с соавторами о развитии теории интегрируемых систем, лишь затронутой в настоящей книге.

Вопросы геометрии систем лучей подробно обсуждаются в двухтомнике В. И. Арнольда, А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде "Особенности дифференцируемых отображений" (Т. I. М.: Наука, 1982; Т. II. М.: Наука, 1984) и в книгах В. И. Арнольда "Теория катастроф" (3-е изд. М.: Наука, 1990) и "Особенности каустик и волновых фронтов" (М.: Фазис, 1996), с обширной библиографией.

Обзоры по симплектической и контактной геометрии и их приложениям опубликованы в трудах семинара Н. Бурбаки (доклад Д. Беннекена "Мистические каустики" в феврале 1986 г.) и в ряде статей (Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии // УМН. 1986. Т. 41, вып. 6. С. 3-18; Особенности систем лучей // УМН. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 77-147; Особенности в вариационном исчислении // Современные проблемы математики. Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3-55; Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений // УМН. 1988. Т. 43, вып. 3. С. 125-160).

Тома 22 и 33 серии "Современные проблемы математики" (М.: ВИНИТИ, 1983 и 1988) содержат обширный дополнительный материал по приложениям симплектической и контактной геометрии к исследованию вариационных задач, а тем самым - к механике, оптике, теории оптимального управления и т. д.

Теория бифуркаций и теория возмущений (не только гамильтоновых, но и общих динамических систем) рассмотрены в учебнике: Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978 (английское издание: Arnold V. I. Geometrical Methods in the

Theory of Ordinary Differential Equations. Springer, 1988. 325 p. - значительно полнее). Новую информацию содержат также доклад "Теория бифуркаций и ее приложения в математике и механике" на XVII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике, Гренобль, 1988 г., и обзор В. И. Арнольда, В. С. Афраймовича, Ю. С. Ильяшенко и Л. П. Шильникова, а также весь выпуск "Динамические системы-5" серии "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления" (М.: ВИНИТИ, 1986). Выпуск "Динамические системы-2" (М.: ВИНИТИ, 1985), написанный И. П. Корнфельдом, Я. Г. Синаем и др., посвящен эргодическим проблемам теории динамических систем, в том числе механических. Этому же вопросу посвящена книга В. И. Арнольда и А. Авеца "Эргодические проблемы классической механики" (1999. Библиотека "Регулярная и хаотическая динамика", N 11), основу которой составляют лекции 1965 года.

Обнаруженные во всех этих теориях факты потенциально имеют широчайший круг приложений, но, поскольку они были открыты лишь недавно и изложены лишь в специальной литературе, их применение сдерживается пока относительной труднодоступностью математических текстов для прикладников. Я надеюсь, что настоящая книга позволит овладеть этими достижениями не только математикам, но и механикам, физикам и всем другим потребителям теории динамических систем, симплектической геометрии и вариационного исчисления.

В. Арнольд
Декабрь 1999 г.

Из предисловия к первому изданию

В классической механике используются весьма разнообразные математические методы и понятия: дифференциальные уравнения и фазовые потоки, гладкие отображения и многообразия, группы и алгебры Ли, симплектическая геометрия и эргодическая теория. Многие современные математические теории возникли из проблем механики и лишь впоследствии приняли тот аксиоматически-абстрактный вид, который так затрудняет их изучение.

Математический аппарат классической механики строится в настоящей книге с самого начала, так что у читателя не предполагается предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных курсов анализа (производная, интеграл, дифференциальные уравнения), геометрии (векторное пространство) и линейной алгебры (линейные операторы, квадратичные формы).

С помощью этого аппарата разбираются все основные вопросы динамики системы, включая теорию колебаний, теорию движения твердого тела и гамильтонов формализм. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону явлений. В этом отношении книга ближе к курсам теоретической механики для физиков-теоретиков, чем к традиционным курсам теоретической механики, читаемым математикам.

Значительная часть книги посвящена вариационным принципам и аналитической динамике. Характеризуя аналитическую динамику в своих "Лекциях о развитии математики в XIX столетии", Ф. Клейн писал, что "физик для своих задач может извлечь из этих теорий лишь очень немного, а инженер - ничего". Развитие науки в последующие годы решительно опровергло это замечание. Гамильтонов формализм лег в основу квантовой механики и является в настоящее время одним из наиболее часто употребляемых орудий в математическом арсенале физики. После того как было осознано значение симплектической структуры и принципа Гюйгенса для всевозможных задач оптимизации, уравнения Гамильтона стали постоянно использоваться в инженерных расчетах в этой области. С другой стороны, современное развитие небесной механики, связанное с потребностями космических исследований, привело к новому возрождению интереса к методам и задачам аналитической динамики.

Связи классической механики с другими отделами математики и физики многочисленны и разнообразны. "Добавления" в конце книги посвящены некоторым из этих связей. В качестве приложений аппарата классической механики здесь рассматриваются основы римановой геометрии, динамика идеальной жидкости, колмогоровская теория возмущений условно-периодических движений, коротковолновые асимптотики для уравнений математической физики и классификация каустик в геометрической оптике.

Эти Добавления рассчитаны на любознательного читателя и не входят в программу обязательного общего курса. Некоторые из них могут составить основу специальных курсов (например по асимптотическим методам теории нелинейных колебаний или по квазиклассическим асимптотикам).
В Добавления внесен также ряд сведений справочного характера (например список нормальных форм квадратичных гамильтонианов). В то время как в основных главах книги автор старался проводить все доказательства как можно подробнее, избегая ссылок на другие источники, Добавления состоят в основном из сводок результатов, доказательства же заменены ссылками на литературу.

Основу книги составил полуторагодовой обязательный курс классической механики, читавшийся автором студентам-математикам 3-го и 4-го года обучения на механико-математическом факультете МГУ в 1966-1968 гг.

В. Арнольд Письмо Арнольда сохранено для истории: Dear Editor,thanks. I have no corrections to insert. I can only write a very short preface to the new edition: V to vremia, kogda ia pisal etu knigu, klassicheskaia mekhanika schitalas' nedostoinoi nastoiashego matematika prikladnoi oblastiu, polnoi beznadezhno ustarevshikh formal'nykh rezeptov, lishennykh kakogo-libo obschematematicheskogo smysla. Predpolagalos', chto nastoiashaia matematika- eto issledovanie nigde ne differenziruemykh funkzii i raskhodiashikhsia riadov Furie ili predstavlenii zelykh chisel summami prostykh slagaemykh, a zaniatia mekanikoi- eto prosto vynuzhdennaia ustupka vneshnim obstoiatel'stvam. Ia gorzhus' tem, chto v preodolenie etikh nelepykh mnenii vnesla vklad i nastoiashaia knizhka. K sozhaleniu, vneshnie obstoiatel'stva teper' takovy, chto liuboe zaniatie matematikoi, da i voobsche naukoi, trebuet v nashei strane nastoiashego podvizhnichestva. Tot fakt, chto v etoi obstanovke nachinaiut izdavat'sia i prodolzhaiut chitat'sia matematicheskie knigi - odin iz nemnogikh povodov dlia optimisticheskoi nadezhdy na vozrozhdenie odnoi iz silneischikh matematicheskikh shkol mira,postavlennoi seichas na gran' unichtozhenia. Pervonachal'nyi tekst etikh lekzii byl sostavlen moim drugom Kolei Kolesnikovym, privlekshim k zapisi moikh lekzii luchshikh studentov mekhmata MGU.Ia posviashaiu eto izdanie ego pamiati. V.Arnold

---

Об авторе

**АРНОЛЬД Владимир Игоревич**

Выдающийся математик, академик АН СССР (РАН). Родился в Одессе, в семье известного математика и методиста И. В. Арнольда. В 1959 г. окончил механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Доктор физико-математических наук (1963). До 1987 г. работал в университете; с 1965 г. — профессор. С 1986 г. работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова. В 1990 г. был избран действительным членом Академии наук СССР (с 1991 г. — Российская академия наук). Президент Московского математического общества (1996). Член многочисленных иностранных академий и научных обществ, лауреат многих отечественных и зарубежных премий в области математики, обладатель ряда почетных докторских степеней в зарубежных университетах.

В. И. Арнольд — автор работ в области топологии, теории дифференциальных уравнений, теории особенностей гладких отображений, функционального анализа, теоретической механики, теории динамических систем, теории катастроф. В 20 лет, будучи учеником выдающегося советского математика А. Н. Колмогорова, он показал, что любая непрерывная функция нескольких переменных может быть представлена в виде комбинации конечного числа функций от двух переменных, тем самым решив тринадцатую проблему Гильберта (1957). Он был одним из создателей теории Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ-теории), ветви теории динамических систем, изучающей малые возмущения почти периодической динамики в гамильтоновых системах и родственных им случаях. Автор десятков теорем, лемм, гипотез, задач и т. д., применимых в самых разных областях математики; основатель большой научной школы. Многие из его учебников и монографий были неоднократно переизданы и переведены на различные языки мира.