Оглавление

Предисловие
Материальные точки
Глава 1. Пространство классической механики и движение
Евклидово пространство
Векторы в евклидовом пространстве
Скалярное и векторное поля на многообразии
Тензоры в евклидовом пространстве
Уравнение Ньютона

Глава 2. Группы движений и подобие
Группы
Группы вращений ($O(2)$,$O(3)$)
Галилеева группа и уравнения Ньютона
Подобие
Степенной характер формул размерности

Глава 3. Вариационный принцип и механика Лагранжа
Вариационное исчисление
Уравнение Эйлера-Лагранжа
Конфигурационное пространство
Теорема Нетер

Глава 4. Оптимальное управление динамическими системами
Задачи оптимального управления
Динамическое программирование
Принцип максимума Понтрягина

Глава 5. Линейные колебания
Одномерное движение
Свободные колебания
Осциллятор в среде с линейным трением

Глава 6. Колебания систем со многими степенями свободы
Уравнения движения
Линейные операторы
Нормальные моды
Диагонализация матриц

Глава 7. Колебания симметричных систем
Точечные группы
Представления групп
Координаты симметрии
Колебания молекулы воды
Колебания цепочки атомов

Глава 8. Вынужденные колебания
Уравнение вынужденных колебаний
Обобщенные функции
Функция Грина
Формула Коши

Глава 9. Движение в вязкой среде и преобразование Лапласа
Преобразование Лапласа

Операторный метод
Модели упруго-пластичной среды
Дробная производная

Глава 10. Маятник с медленно меняющимся подвесом
Метод ВКБ
Асимптотические представления
Метод эталонного уравнения Лангера

Глава 11. Равновесие
Равновесие
Развертки
Ростки и функции катастроф
Геометрия складки и сборки

Глава 12. Применение теории катастроф
Потенциальный подход к конструкциям
Модель Огусти
Модель арки

Глава 13. Движение частицы по поверхности
Координаты на поверхности
Векторные и тензорные поля на многообразии
Метрика на поверхности
Геодезические линии

Глава 14. Искривленное пространство
Кривизна
Параллельный перенос векторов
Смачивание пористых систем

Линейные поля и волны
Глава 15. Сплошная среда
Колебания одномерной цепочки
Пилообразные колебания
Колебания прямоугольной мембраны
Колебания круглой мембраны

Глава 16. Напряжения в твердом теле
Тензор деформации
Тензор напряжений
Теорема Гаусса-Остроградского
Уравнение движения деформируемого тела

Глава 17. Равновесие упругой среды
Уравнение равновесия упругой среды
Уравнение Пуассона
Статическая деформация упругой среды

Глава 18. Волны в упругой среде
Продольные и поперечные волны
Звуковые волны в жидкости и газе
Плоские волны

Глава 19. Движение жидкости
Уравнение динамики вязкой жидкости
Гравитационные волны на глубокой воде

Внутренние гравитационные волны при наличии скачка плотности

Глава 20. Электромагнитное поле
Уравнения Максвелла в интегральной форме
Дифференциальная форма уравнений Максвелла
Дифференциальные формы и цепи

Глава 21. Колебания балки
Постановка задачи
Собственные функции
Решение методом Фурье
Возбуждение резонансных колебаний

Глава 22. Излучение волн
Потенциалы
Волны при наличии источников
Принцип Гюйгенса и формула Кирхгофа

Глава 23. Волновые пучки
Параболические пучки
Гауссов пучок
Поток энергии и фокусировка

Глава 24. Геометрическая оптика
Приближение эйконала
Метод характеристик
Поле вблизи каустики
Метод перевала

Глава 25. Вейвлеты
Всплески как полный набор ортогональных функций
Базисные функции всплесков
Свойства всплеск-преобразования
Непрерывные вейвлет-преобразования

Глава 26. Дифракция импульсов
Прохождение импульса через квадратное отверстие
Функция Грина в задаче дифракции
Нестационарный принцип Гюйгенса-Френеля

Глава 27. Дисперсия и поглощение волн
Приближение параболического уравнения
Автомодельное решение параболического уравнения
Распространение волн при слабой дисперсии

Глава 28. Квантовые системы
Квантовые состояния
Уравнение Шредингера
Правила Фейнмана
Действительная форма записи уравнения Шредингера
Стационарные состояния
Оператор Гамильтона
Матричные элементы высоковозбужденных состояний

Глава 29. Оптимальное управление квантовыми системами
Задача квантового управления
Принцип максимума

Формирование волнового пакета

Глава 30. Квантовая интерференция

Принцип Гюйгенса для волновых полей
Пропагатор
Функциональное исчисление
Квантовая телепортация

Литература

Предметный указатель

Предисловие

Основным стимулом к написанию книги послужила вера в возможность возрождения фундаментальной науки в России. Это требует большого притока талантливой молодежи. В то же время ситуация такова, что в результате социально-экономических потрясений последних десятилетий новое поколение существенно переориентировалось на другие виды деятельности, -- в первую очередь на бизнес, который открыл для нее не только путь к обогащению, но и реальное поле приложения сил, ясную и достижимую жизненную перспективу. В результате произошел мощный отток наиболее энергичной молодой составляющей из науки и образования. Определенный вклад внесла в этот процесс и эмиграция. Так образовался многолетний временной зазор между разными поколениями ученых.

Ситуация вынуждает констатировать невозможность плавного сращивания бывшей советской науки и нынешней российской науки. Вхождение в науку новых ученых осложнено лавинообразным увеличением информации, которая удваивается каждые пять лет. В этих условиях простого переиздания старых книг недостаточно, а иногда это может даже законсервировать отставание. Еще одно обстоятельство, стимулировавшее работу над книгой, -- разрыв, сложившийся еще ранее между математической подготовкой студентов в вузе, даже хорошем, и математическим аппаратом современной науки. Как следствие, кругозор выпускников высшей школы недостаточно широк, а возможности применения ими современных математических методов в самостоятельных исследованиях ограничены.

Важную роль в подготовке успешных исследователей играет освоение искусства построения и применения математических моделей различных явлений. После того, как проблема сформулирована в ясной математической форме, ее дальнейшее решение является преимущественно математической задачей. В то же время в процессе решения приходится следить за смыслом совершаемых математических операций, что часто позволяет контролировать правильность выводов, а иногда и предвидеть результат. Такой характер взаимоотношений с математикой характерен для большинства прикладных исследований. Однако, большей частью, математические книги уделяют этой стороне использования математики совершенно недостаточно места. В итоге разница между знанием математики как таковой и возможностями ее эффективного применения очень велика. Эта парадоксальная, но распространенная ситуация связана также с особенностями, возникающими при построении и анализе математических моделей явлений и процессов. Если правильно сформулированная чисто математическая задача содержит однозначно определенные объекты, и правильный ответ также обычно один, то при построении или выборе математической модели реальных явлений и процессов существует множество вариантов, выбор между которыми диктуется как содержанием самой задачи, так и арсеналом методов, которыми владеет данный исследователь.

Возьмем в качестве примера такой объект, как планета Земля. При решении той или иной задачи приходится задавать разные геометрические образы Земли. Выходя из дома, мы обычно представляем участок поверхности Земли, по которому нам предстоит идти, как плоскую поверхность. Если перепады высот велики, то модель усложняется, и поверхность перестает быть плоской, что характеризуется разной высотой ее точек над некоторым фиксированным уровнем -- уровнем моря. При запусках орбитальных спутников Землю необходимо представлять в виде шара, а также, возможно, учитывать ее приплюснутость. При описании Земли как объекта Солнечной системы естественно принять ее за точку. Если мы описываем тектонические процессы, то Земля предстает как сложное тело, содержащее твердые и жидкие слои вещества. Наконец, рассматривая из космоса горные районы, например Кавказ, необходимо ввести для характеристики изрезанности наблюдаемой картины понятие фрактальности. В итоге выбор между тем или иным геометрическим образом Земли определяется не только свойствами самого объекта, но и решаемой задачей, характером явлений, которые доминируют в изучаемых процессах.

Выбор модели становится возможен после всестороннего предметного анализа проблемы, когда выявлены основные и второстепенные факторы, влияющие на изучаемое явление. Пока что не существует науки, которая давала бы универсальные алгоритмы построения математических моделей. В то же время накоплен огромный фактический опыт построения конкретных математических моделей в разных областях деятельности, и, в определенной степени, его можно и целесообразно систематизировать. Подобный интегральный подход не нов. В подтверждение этого можно привести слова Декарта: "...Тот, кто серьезно стремится к познанию истины, не должен избирать какую-нибудь одну науку, -- ибо все они находятся во взаимной связи и зависимости одна от другой, -- а должен заботиться лишь об увеличении естественного света разума и не для разрешения тех или иных школьных трудностей, а для того, чтобы его ум мог указывать воле выбор действий в житейских случайностях. Вскоре он удивится, что продвинулся гораздо далее, нежели люди, которые занимаются частными науками, и достиг не только тех результатов, которых они хотели бы добиться, но и других, более ценных, о которых те не смеют и мечтать."

Цель данной книги, в первую очередь, состоит в том, чтобы познакомить научную молодежь с разнообразием математических моделей и показать на примере этих моделей математические методы в работе. Основным материалом для обсуждения служат физические и технические модели, хотя в ряде случаев затрагиваются химия, биология и экономика. Общие положения теории сопровождаются примерами и задачами, позволяющими уточнить и проверить понимание материала. Часть задач представляет собой вопросы, которые сформулированы в виде некоторых утверждений, вывод которых предлагается проделать читателю самостоятельно. При работе над материалом книги решение задач не должно представлять больших трудностей. Это также является наилучшим способом проверки достигнутого уровня понимания.

Изложение в значительной степени построено так, как это происходит в ходе чтения курса лекций. В результате трактовка отдельных вопросов обладает определенной автономностью, и читателю не требуется все время обращаться к предыдущим разделам. Конкретный естественно-научный и технический материал используется как база для построения тех или иных математических моделей, значение которых обычно далеко выходит далеко за рамки данного примера. В то же время такая последовательность позволяет проследить важный путь от общенаучной модели к ее математическому образу, а затем перейти к решению сформулированной математической задачи. Математические модели, т.е. типы математических конструкций и методы их решения, применяемые в одном разделе, чаще всего не повторяются, хотя они могут быть рассмотрены и в связи с другими проблемами.

Выбор примеров не является единственно возможным и отражает опыт и пристрастия автора. Этот произвол в значительно меньшей степени относится к самим математическим моделям, которые характерны для совершенно разных разделов науки, сохраняя свою формальную математическую структуру. Мы полагаем, что избранный способ введения математических объектов психологически легче и понятнее для читателя, обладающего конкретным мышлением, чем традиционный аксиоматический метод изложения математических структур. Он оправдан также тем, что главным содержанием книги является построение математических моделей реальных объектов и явлений, а этот процесс, как уже отмечалось, не может быть полностью формализован. Для дальнейшего изучения затронутых математических моделей и методов приведен список рекомендуемой литературы. Излагаемые нами вопросы отражены в них с максимальной полнотой, а данную книгу можно в этом смысле рассматривать как конструктивное введение в соответствующие разделы науки.

У читателя предполагается знание основных фактов аналитической геометрии, линейной алгебры и математического анализа в объеме программы двух -- трех первых курсов университета, в том числе технического. Соответствующий материал можно также самостоятельно освоить или при необходимости вспомнить при помощи учебников [1, 2]. Изучение изложенных моделей и методов потребует от читателя времени и усилий, которые могут быть оправданы только полученным конечным результатом.

Структура книги соответствует классификации типов моделей. Первая часть состоит из двух разделов. Первый раздел посвящена математическим моделям, возникающим в классической механике материальной точки или системы материальных точек и описанию их перемещения в пространстве и времени. Успехи механики настолько неоспоримы, что долгое время она была единственным образцом для построения математических моделей любых иных явлений. В конечном итоге, подход, основанный на описании динамики объектов различной природы при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений, выделился в отдельное направление и получил название "динамические системы". Во втором разделе рассмотрены линейные распределенные системы. В нем приведены модели, описывающие деформацию и волны в сплошных средах при малых амплитудах возмущений. Все эти модели объединяет то, что они линейны и непрерывны, что позволяет использовать аппарат линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Линейные модели, основанные на понятии поля, выходят далеко за рамки теории сплошных сред и описывают такие объекты, как электромагнитное поле, а также волновые функции квантовой теории.

Вторая часть книги также состоит из двух разделов, но связана с моделями нелинейных и сложных систем. Первый раздел посвящен нелинейным явлениям. Для описания нелинейных явлений пока не удалось развить единого универсального подхода. Основные идеи анализа нелинейных моделей основываются на выделении различных типов устойчивых состояний, движений и структур, характеристики которых остаются неизменными или медленно меняются во времени. Несмотря на отсутствие единого универсального математического аппарата, столь характерного для линейных полей и волн, в нелинейных моделях постепенно сформировался набор методов, применимый в разных ситуациях и для самых разных систем. Во втором разделе речь идет о построении моделей объектов и систем, состоящих из большого числа элементов нескольких видов, взаимодействующих друг с другом. При этом детальный характер взаимодействия элементов системы часто неизвестен. Полное описание таких сложных систем на основе динамических уравнений или алгоритмов конечной длины становится невозможным. Для их формализации используются преимущественно статистические модели, основанные на вероятностном представлении как состояния системы, так и ее эволюции. Общие параметры, характеризующие всю систему, определяются как некоторые средние величины для ансамбля ее элементов. Другим направлением, дополняющим статистический подход, является феноменологическое описание сложных систем, основанное на установлении общих характеристик и взаимовлияния укрупненных блоков системы без детализации внутренней структуры и свойств. Такой подход позволяет получить важные результаты для слабо изученных структур при наличии ограниченного набора нечетких данных.

Необходимо отметить, что в книге совсем немного затрагиваются очень важные и интересные вопросы компьютерного моделирования, которые стремительно развиваются и составляют, по сути, самостоятельную научную дисциплину.

В основу книги положены курсы лекций, прочитанные в разные годы студентам и аспирантам Воронежского государственного архитектурно-строительного университета и Воронежского государственного университета. Я благодарен Ю.А.Россихину, М.В.Шитиковой, М.Н.Кирсанову, Н.Б.Делоне, В.П.Крайнову, Д.А.Новикову и другим моим коллегам и друзьям, чьи советы помогли мне в работе над книгой. Особую благодарность я выражаю Е.М.Михайлову, С.Н.Кутищеву и М.А.Преображенскому, результаты совместной работы с которыми нашли отражение в ряде разделов книги. Наконец, само появление книги вряд ли бы стало возможным без большой технической помощи Е.М.Михайлова и П.В.Рясного, а также без терпения и поддержки О.С.Довжиковой.

Об авторе

ГОЛОВИНСКИЙ Павел Абрамович

Доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного технического университета, исполнительный директор Воронежского научно-образовательного центра по проблемам управления, член региональной редколлегии журнала «Проблемы управления» и сборника РАН «Управление большими системами».

В 1977 г. закончил физический факультет Воронежского государственного университета. В 1982 г. получил степень кандидата физико-математических наук по специальности «оптика» (отдел теплофизики АН УзССР, г. Ташкент). В 1994 г. получил степень доктора физико-математических наук по специальности «теоретическая физика» (Санкт-Петербургский государственный университет). В 1994 г. — приглашенный профессор в Университете им. Лаваля (Квебек, Канада); в 1995–1997 гг. — исследователь в Лаборатории атомной и молекулярной физики им. Эми Коттон (Орсэ, Франция).

Научные интересы: теоретическая физика, управление, материаловедение, теория сложных систем и нейронные сети. Основные научные результаты: теория многочастичных процессов в атомах и отрицательных ионах под действием сильного светового поля, теория дифракции ультракоротких импульсов, расчет электростимулированных ядерных реакций в лазерных полях релятивистской интенсивности, фрактальное описание дисперсных систем и трещин, квантовые нейроны. Автор более 200 научных работ, 12 учебников и монографий.